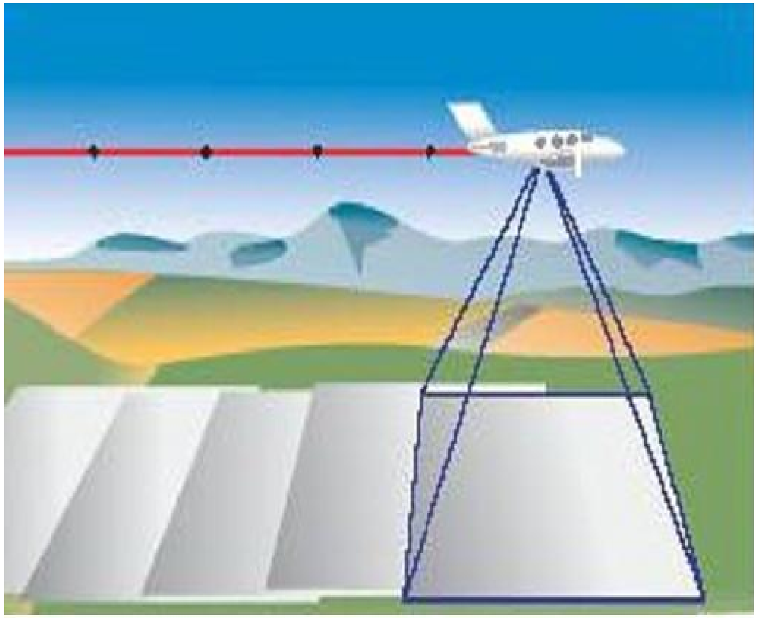
摄影测量基础知识

主要内容：

- 3.1　航空摄影
- 3.2　中心投影的基本知识
- 3.3　航摄像片上特殊的点、线、面
- 3.4　摄影测量常用的坐标系统
- 3.5　航摄像片上的内、外方位元素
- 3.6　像点的空间直角坐标变换与中心投影构像方程
- 3.7　航摄像片上的像点位移

3.1　航空摄影



航空摄影

- 利用安装在航摄飞机上的航摄仪从空中一定角度对地面进行摄影

3.1　基本概念

一、航空摄影前的准备

制定航摄计划：

- 确定摄区范围
- 选择航摄仪
- 确定摄影比例尺
- 确定摄影航高、摄影基线等
- 需要的像片数、日期等

一、航空摄影前的准备

1. 确定摄区范围

摄区面积较大或摄区地形复杂时，要进行分区，按分区进行摄影

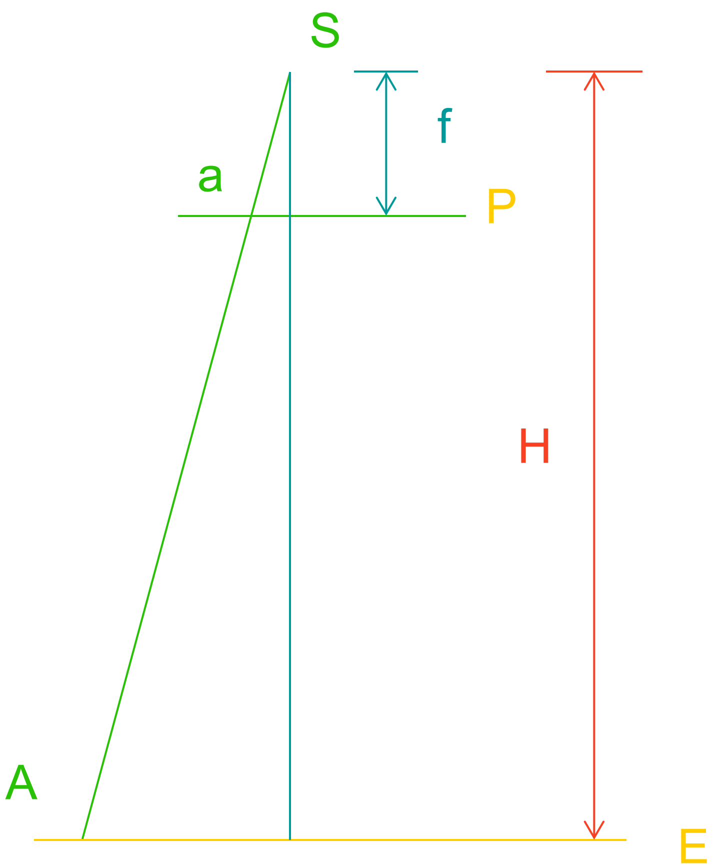
2. 航摄仪的选择

平坦地区大比例尺测图 ⟹ 长焦距 窄角

非平坦地区 ⟹ 中焦距 常角或宽角

一、航空摄影前的准备

3、摄影比例尺



视摄影像片水平、地面取平均高程时，像片上的线段 *l* 与地面上相应的水平距*L* 之比为摄影比例尺

$$\frac{1}{m}=\frac{l}{L}=\frac{f}{H}$$

f为摄影机主距，***H***为航高

● 摄影比例尺的选择

必须考虑：

成图比例尺、测图方法、成图精度

另外还要考虑 经济性以及航摄像片往后的使用可能性

测图比例尺

比例尺类型	航摄比例尺	测图比例尺	数字摄影cm
大比例尺	1:2000 ～1:3000	1:500	4-7
	1:4000 ～1:6000	1:1000	7-14
	1:8000 ～ 1:12000	1:2000，1:5000	14-28
中比例尺	1:15000～1:20000	1:5000	20-40
	1:10000～1:35000	1:10000	40-80
小比例尺	1:20000～1:30000	1:25000	50-120
	1:35000～1:55000	1:50000	70-160

一、航空摄影前的准备

4. 摄影航高以及摄影基线的确定

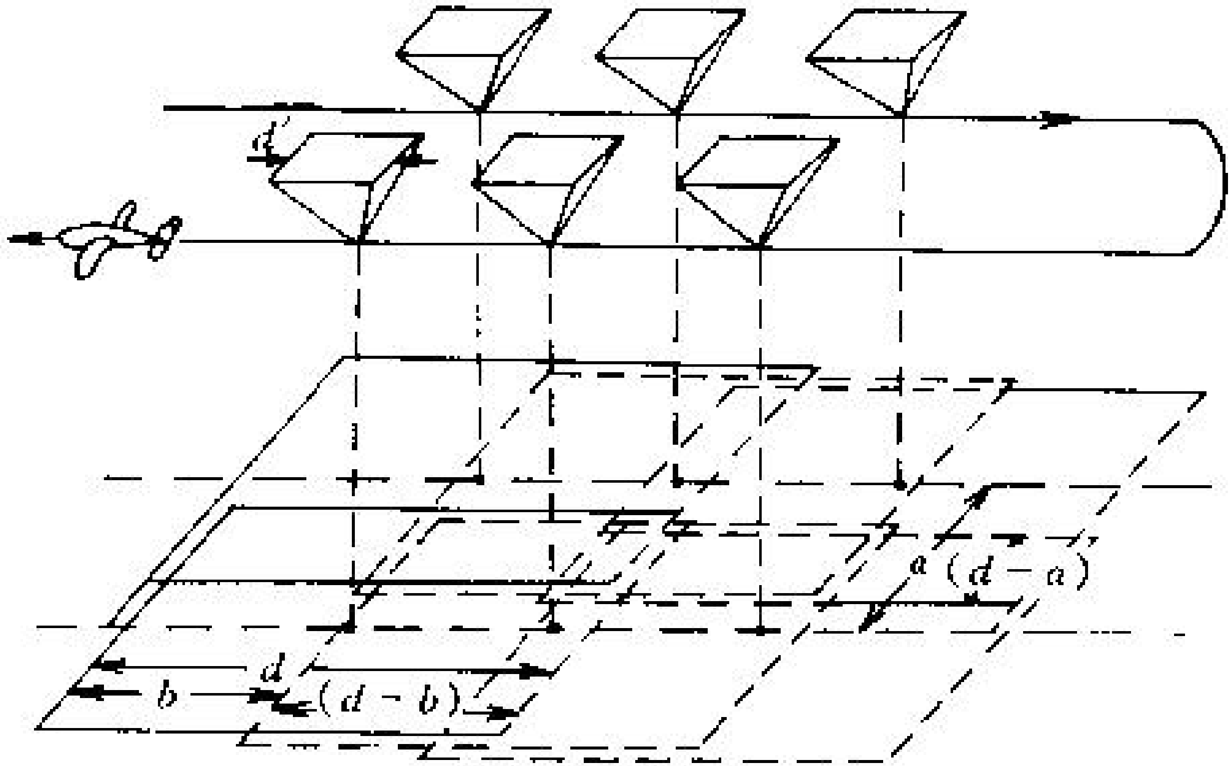
航高:摄影机相对某一水准面的高度。

- **相对航高：相对于某一基准面的高度。**

摄影航高：当取摄区内的平均高程面作为摄影基准面时，摄影机的物镜中心至该面的距离。

$$H = m \cdot f$$

- **绝对航高：相对于平均海平面的高度。**



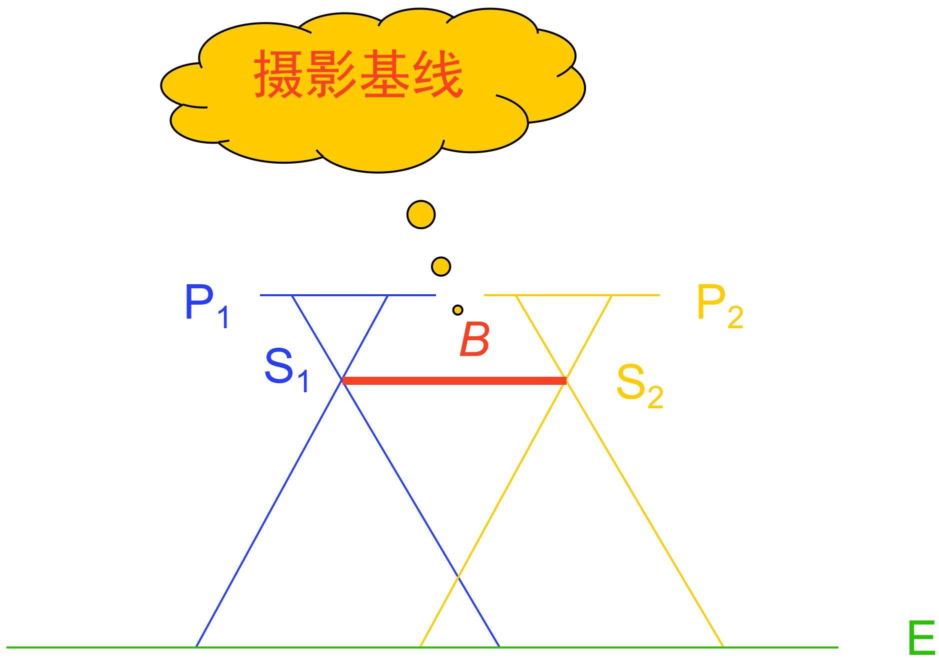
在曝光瞬间，摄影机物镜所处的空间位置称为摄站点。

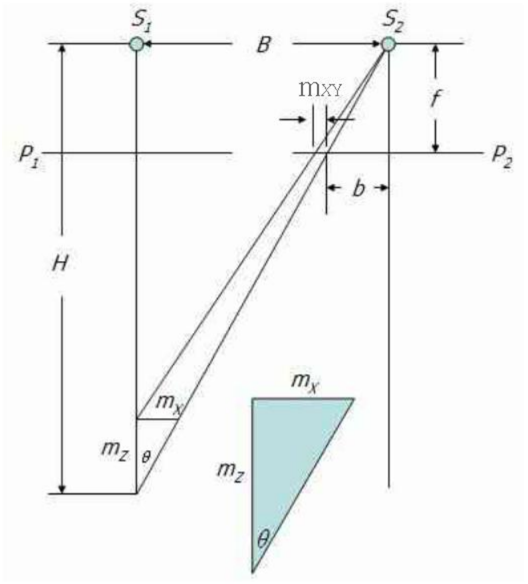
航线方向相邻两摄站点的空间连线称为摄影基线，

通常用B表示，与相片重叠度有关。

5. 基高比

航向相邻两个摄影站间的距离

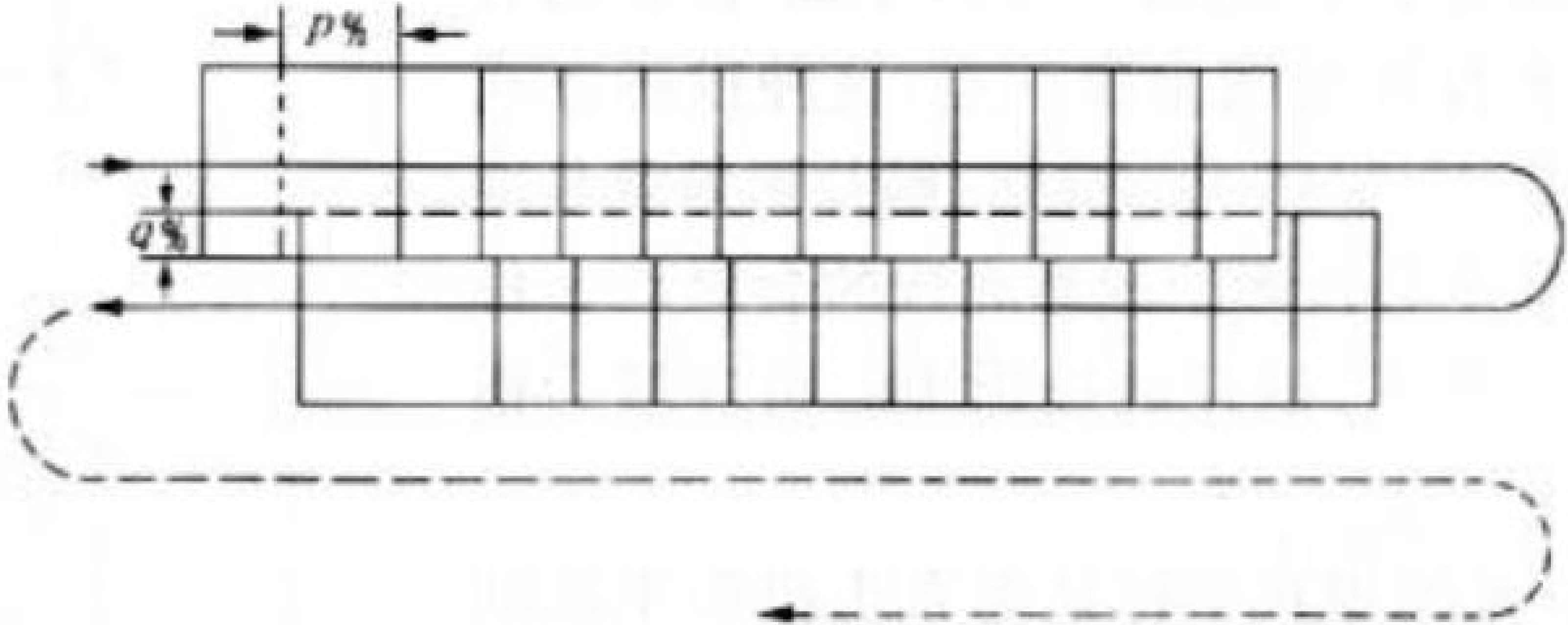




$$m_z = m_x / \tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{B}{H} = b$$

$$m_z = m_x \times \frac{1}{b}$$



相邻像片间具有一定的重叠。

以测图为目的进行的航空摄影多取用竖直摄影方式 。

二、摄影测量生产对摄影资料的基本要求

影像基本的要求

- 色调大致一致
- 相邻相片有足够的重叠度
- 航线弯曲较小
- 航高差较小
- 航片旋偏角较小

二、摄影测量生产对摄影资料的基本要求

影像色调的要求

像片清晰

色调一致

反差适中

不应有妨碍测图的阴影

对像片重叠的要求

像片的重叠是进行立体观察、量测及像片连接的必须条件。

像片的重叠度：相邻的两张像片重叠部分占整张像片的比例。

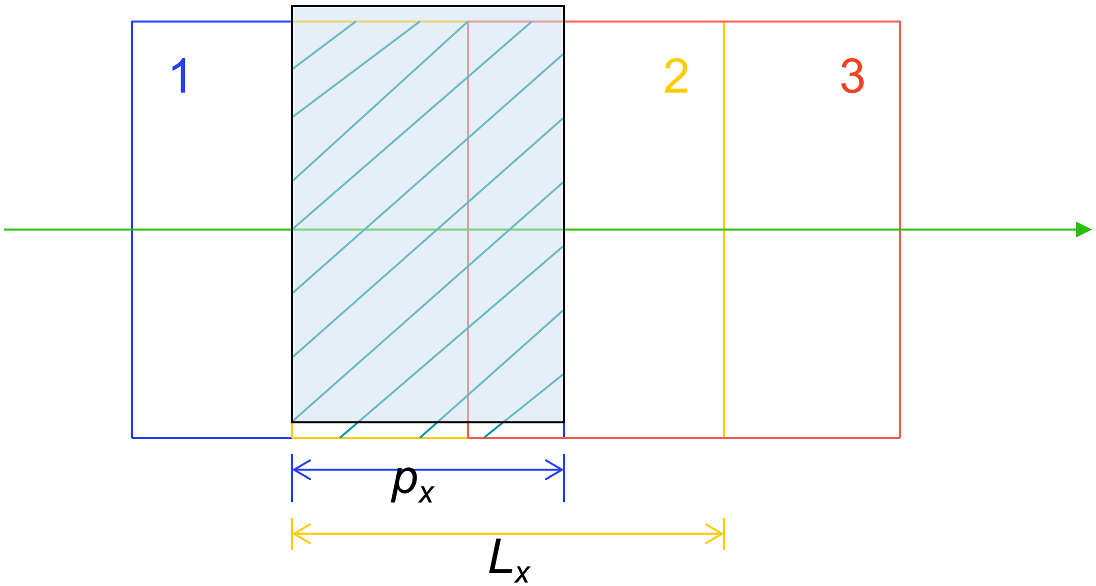
航向重叠：同一航线内相邻像片应有一定范围的影像重叠

旁向重叠：相邻航线的相邻像片上应具有一定范围的影像重叠

航向重叠度一般要求：

p%=60%--65%，最小不得小于53%

航向重叠度



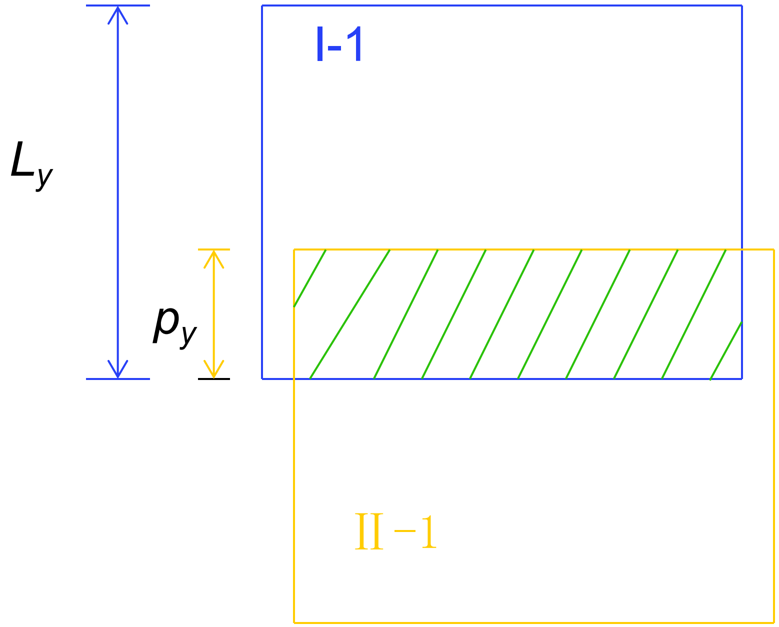
$$p_x\% = \frac{p_x}{L_x} \times 100\%$$

$$B = m \times L \times (1 - p\%)$$

旁向重叠度一般要求：

不得少于15%，保持在30%-40%之间。

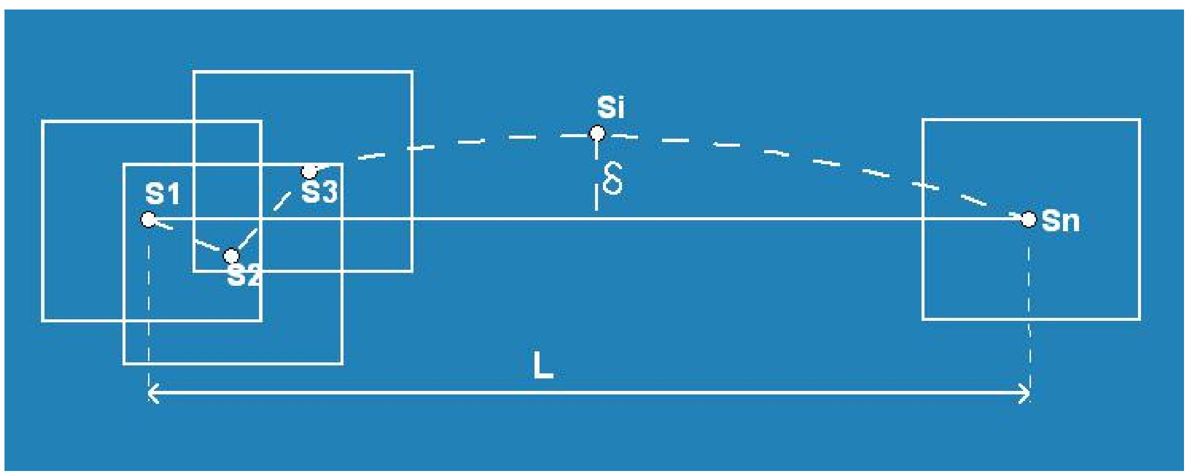
旁向重叠度



$$p_y\% = \frac{p_y}{L_y} \times 100\%$$

对航线弯曲的要求

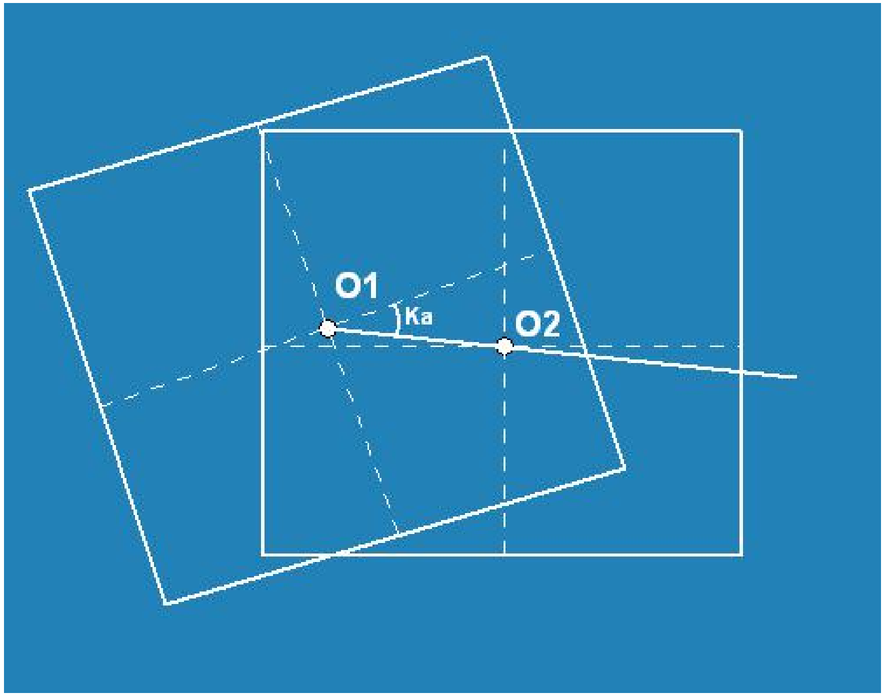
- **航线弯曲：** 把一条航线内的像片根据地物的影像叠拼起来，各张像片的像主点连线不在一条直线上，而呈现为弯弯曲曲的折线
- **航线弯曲度：** 航线两端像片的像主点间的直线距离L与偏离该直线最远的像主点到直线的距离 δ 之比



$$R\% = \frac{\delta}{L} \times 100\% \qquad \text{要求} \quad R\% \le 3\%$$

对像片旋角的要求

像片旋角： 相邻两像片的主点的连线与像幅沿航线方向的两框标连线之间的夹角 κ



一般情况小于6度，个别不应大于8度，而且不能有连续三张像片的旋角超过6度的情况。

对航高差的要求

航高差： 空中摄影时飞行航高的变化量

$$\Delta H \le 5\% H$$

同一航线相邻航片航高差不得大于30米，最大航高与最小航高之差不得大于50米。

三、空中摄影质量的评定

（1）负片上影像是否清晰、框标影像是否齐全、像幅四周指示器件的影像（如水准气泡等）是否清晰可辨；

（2）由于太阳高度角的影响，地物阴影长度是否超过摄影规范的规定，地物阴暗和明亮部分的细部能否辨认清楚；

（3）航摄负片上是否存在云影、划痕、乳剂层脱落等现象；

（4）负片上的黑度是否符合要求，影像反差等不得大于规范要求；

（5）航带的直线性、航带间的平行性、像片影像的重叠度、航高差和摄影比例尺等等都要检查评定，并不得超出规定的技术指标。

3.2　中心投影的基本知识

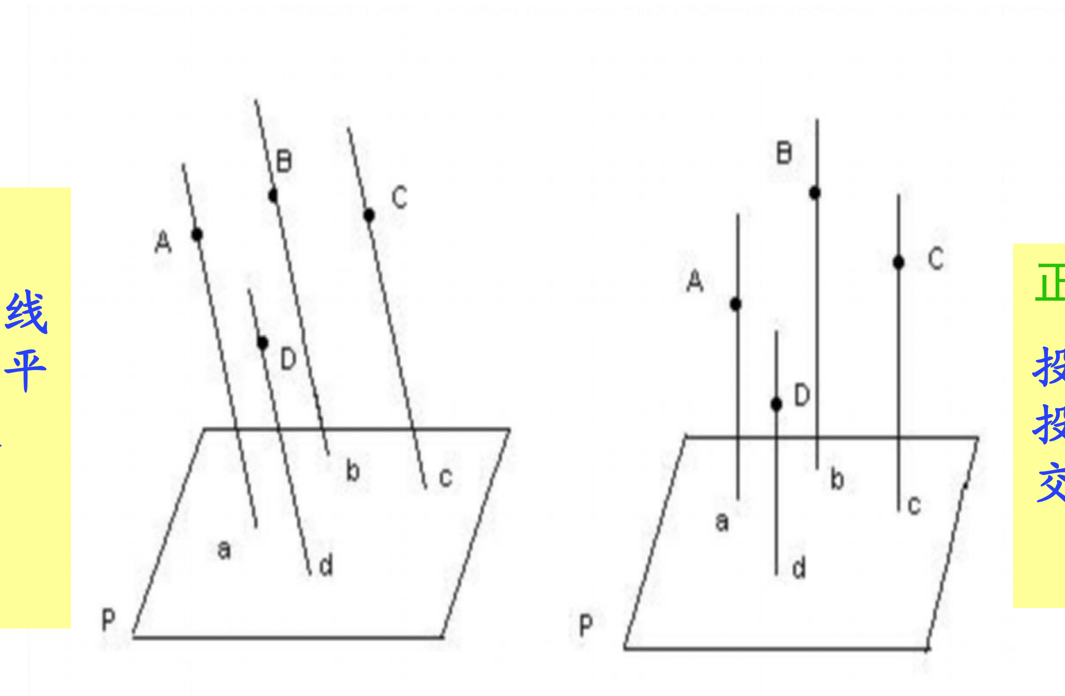
摄影测量是通过量测像片来获得地面目标的几何信息，这就要研究像片和地面之间的几何投影关系。

平行投影

投影射线平行于某一固定方向的投影的投影称为平行投影

斜投影

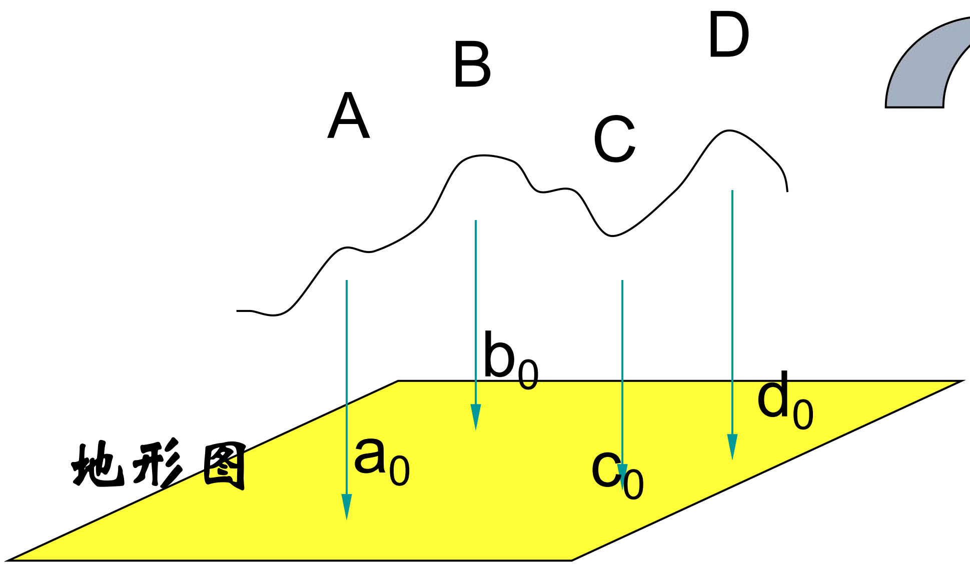
投影射线与投影平面斜交

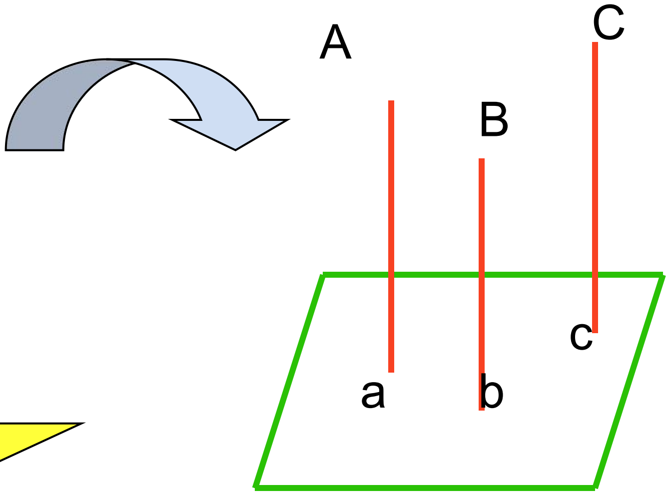


正射投影

投影射线与投影平面正交

地形图是地面的什么投影？





正射投影

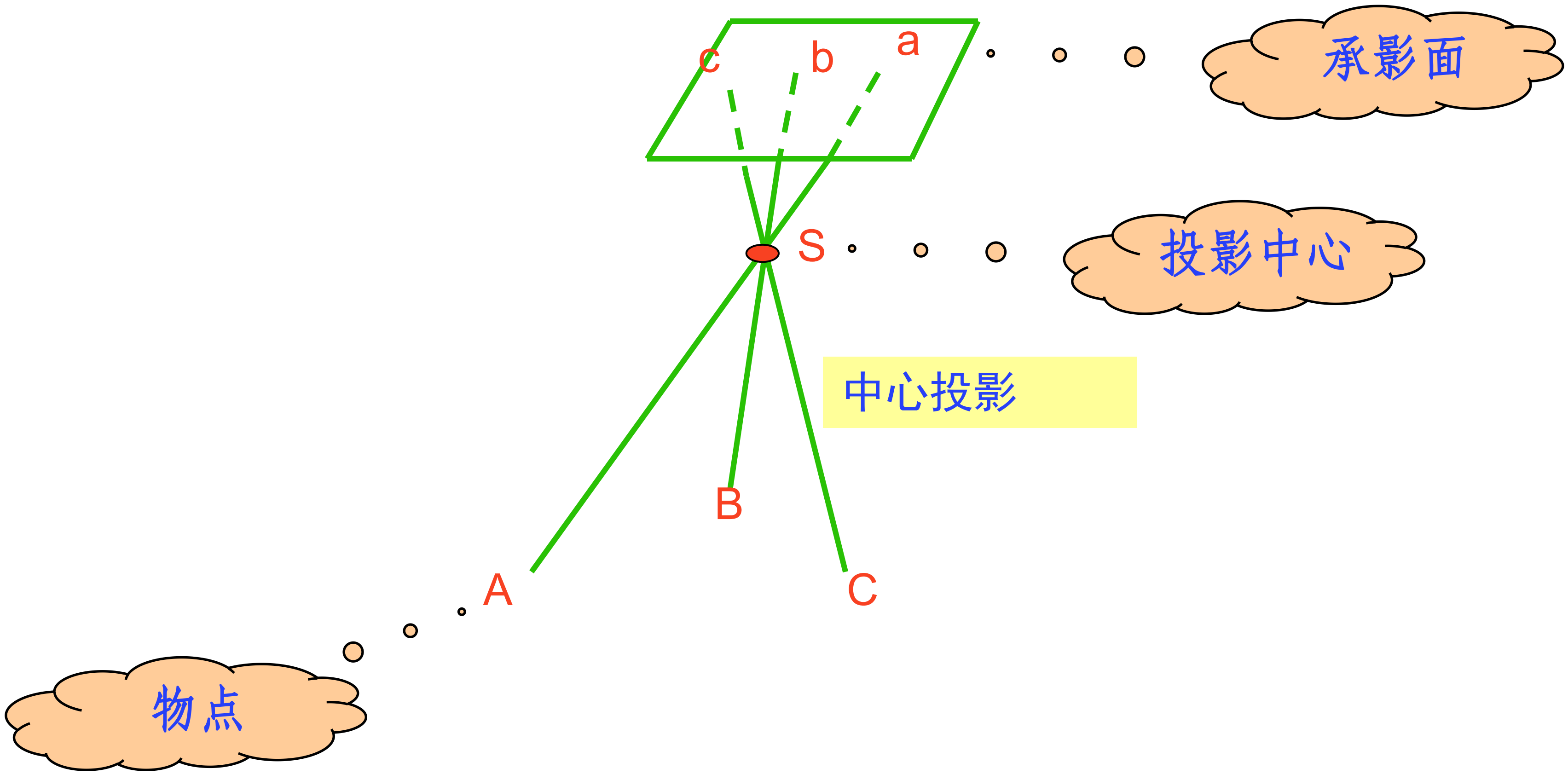
地形图是地面的正射投影！

地形图的特点

1、图上任意两点间的距离与相应地面点的水平距离之比为一常数，等于图比例尺（等比）

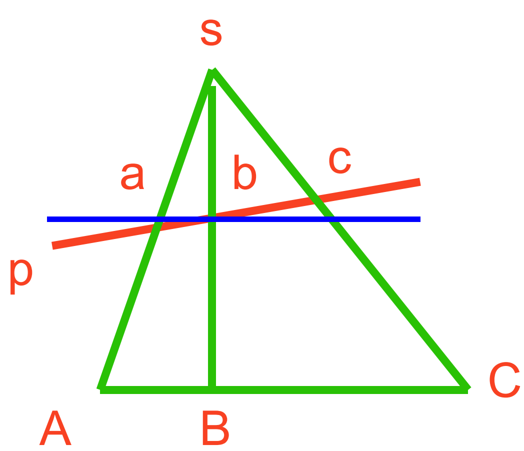
2、图上任意一点引画的两条方向线间的夹角等于地面上对应的水平角（保角）

航摄像片为中心投影

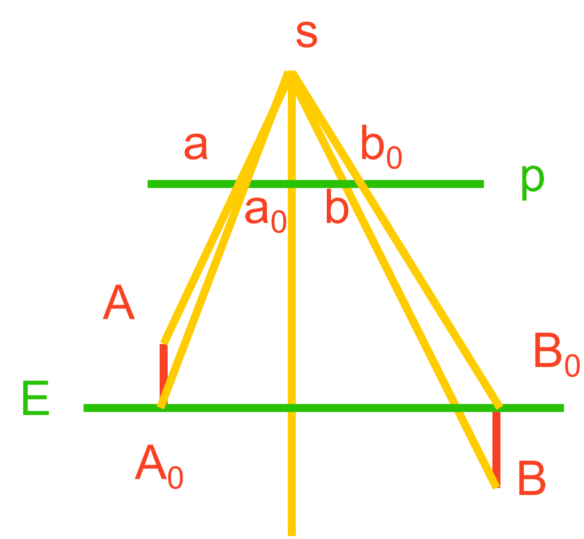


航摄像片的特点一

1、当像片倾斜、地面起伏时，地面点在航摄像片上构像相对于理想情况下的构像所产生的位置差异称**像点位移**



像片倾斜引起的像点位移



地形起伏引起的像点位移

航摄像片的特点之二

比 例 尺：地图有统一比例尺，航片无统一比例尺

表示方法：地图为线划图，航片为影像图

表示内容：地图需要综合取舍

几何差异：航摄像片可组成像对立体观察

摄影测量的主要任务之一：把地面按中心投影规律获取的摄影比例尺航摄像片转换成以测图比例尺表示的正射投影地形图

地形图与航片的区别

- 投影方式：

  航片=中心投影；地图=正射投影

- 比例尺：

  地图有统一的比例尺；航片无统一比例尺

- 表示方法：

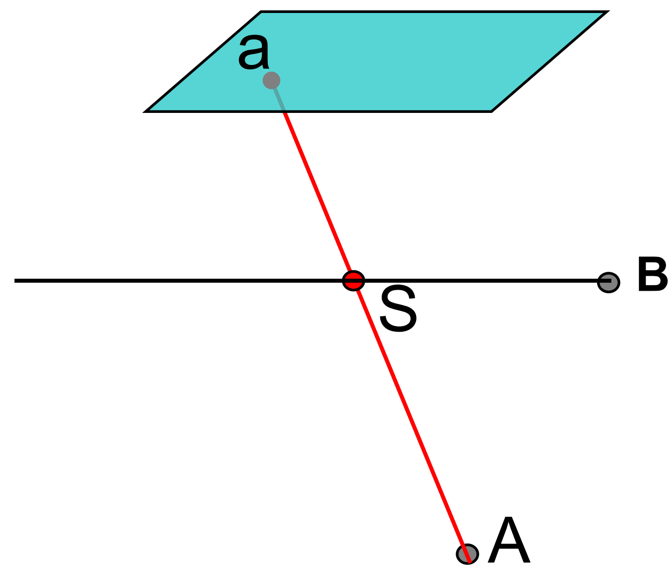
  地图为线划图，航片为影像图

- 表示内容：

  地图需要综合取舍，航片表示较全面

四、中心投影的主要特征

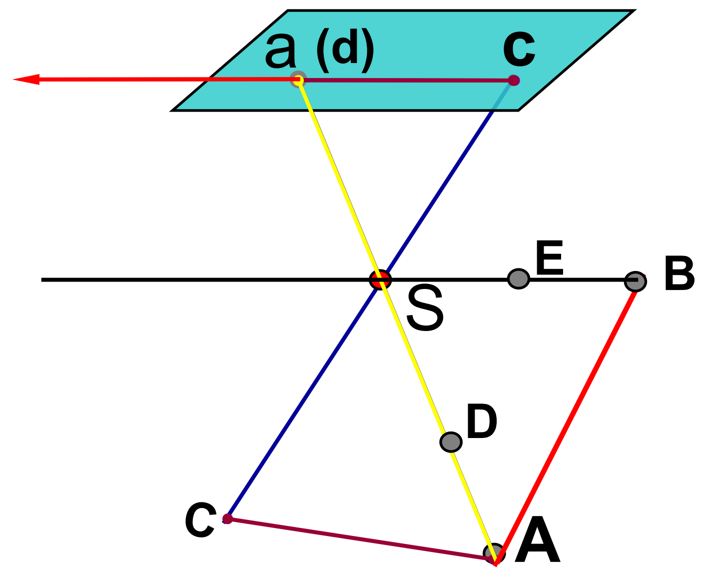
- 点的中心投影————一般是点



特例：点B

投影线与投影面平行

•线段的中心投影一般是线段



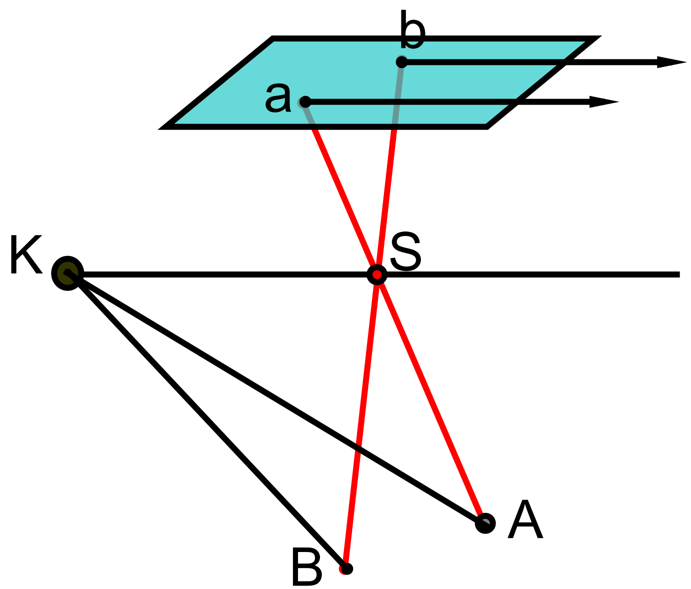
特例：

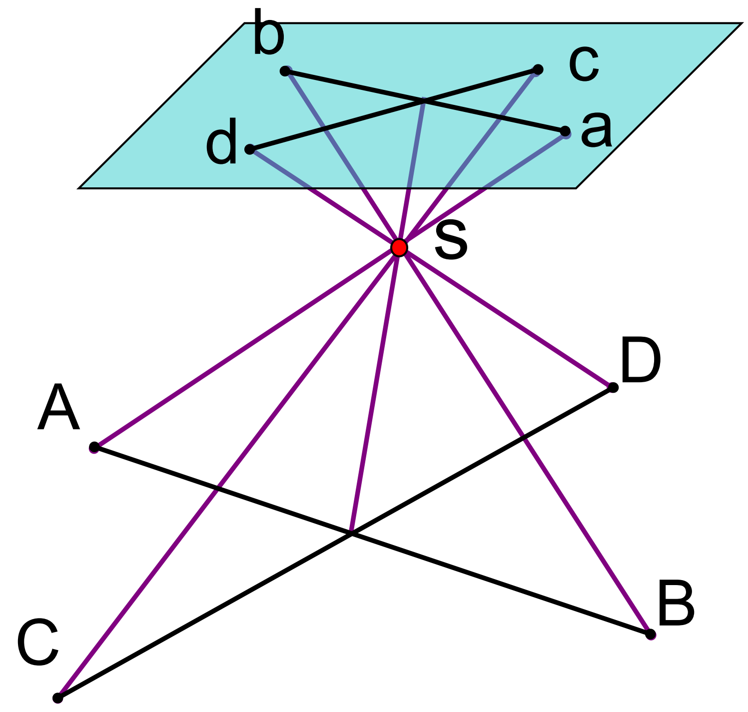
AB

AD

BE

•相交线段的中心投影一般是相交线段

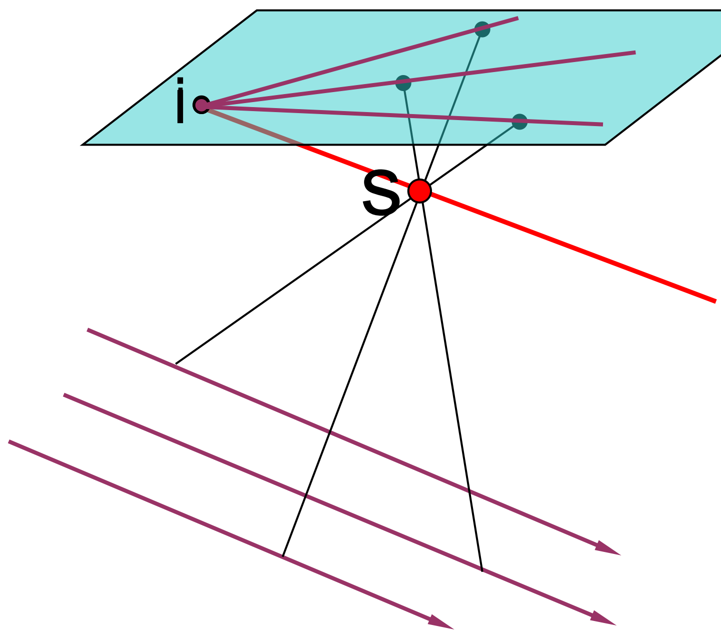




特例：
相交线段的中心投影为
平行的半直线

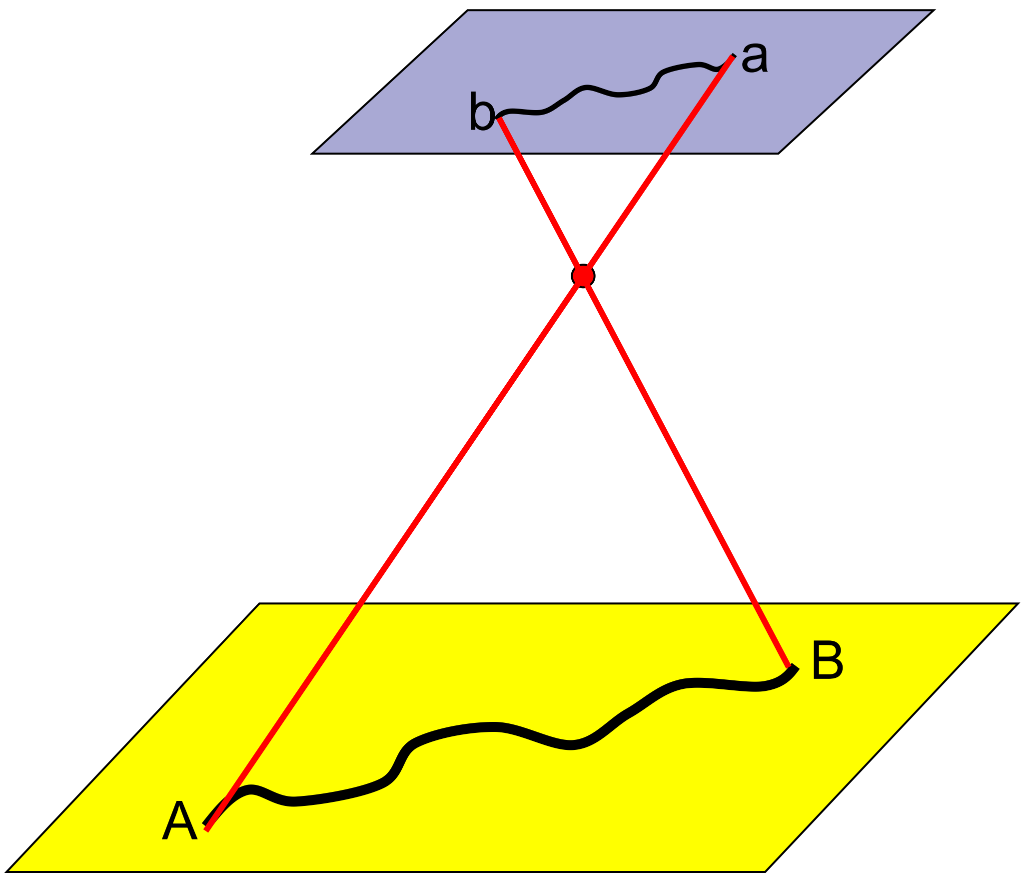
•空间一组不与承影面平行的平行直线

其中心投影为一平面线束。

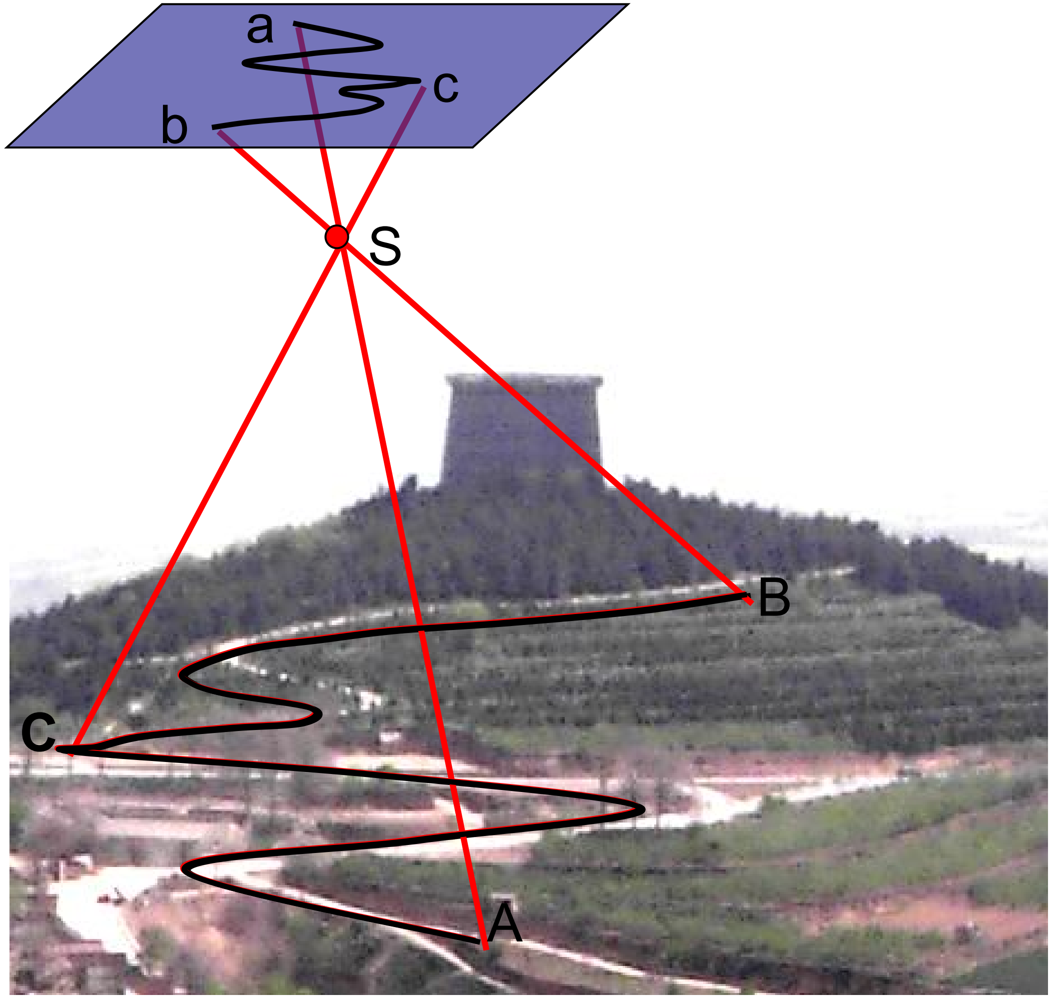


合点（灭点）：空间一组不与承影面平行的直线无穷远点处的中心投影。

- 平面曲线的中心投影平面曲线

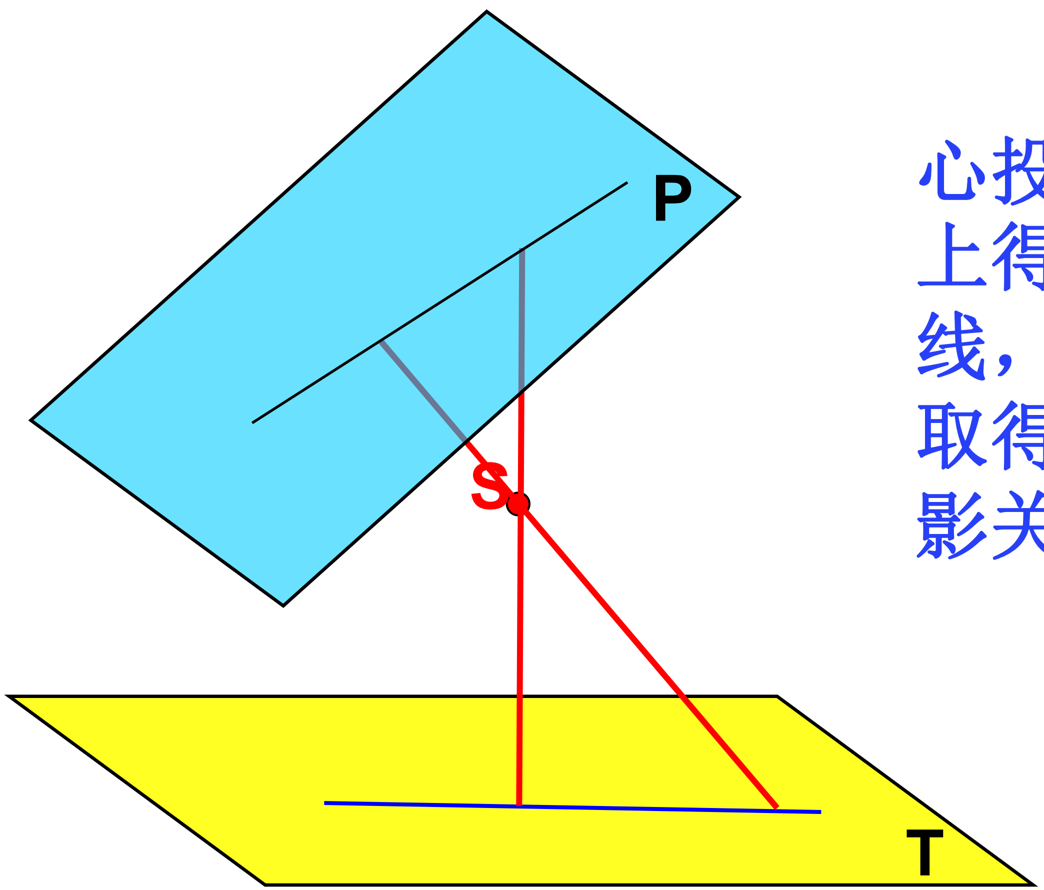


• 空间曲线的中心投影也是平面曲线



3.3 航摄像片上特殊的点、线、面

透视变换定义
(Definition of the Perspective Transform)



将空间点、线作中心投影，在投影平面**P**上得到一一对应的点、线，这种经中心投影取得的一一对应的投影关系称为透视变换。

投影变换的特性

同素性-几何元素的种类不发生变化

互换性-像与物互为投影

结合性-直线的交点投影以后仍为直线的交点

航摄像片中的重要点、线、面

点：摄影中心S

像主点o

地主点O

像底点n

地底点N

等角点c

地面等角点C

主合点i

主遁点J

面：地面E

像片面P

主垂面W

真水平面E_s

线：迹线TT

主光线SoO

主垂线SnN

摄影方向线VV

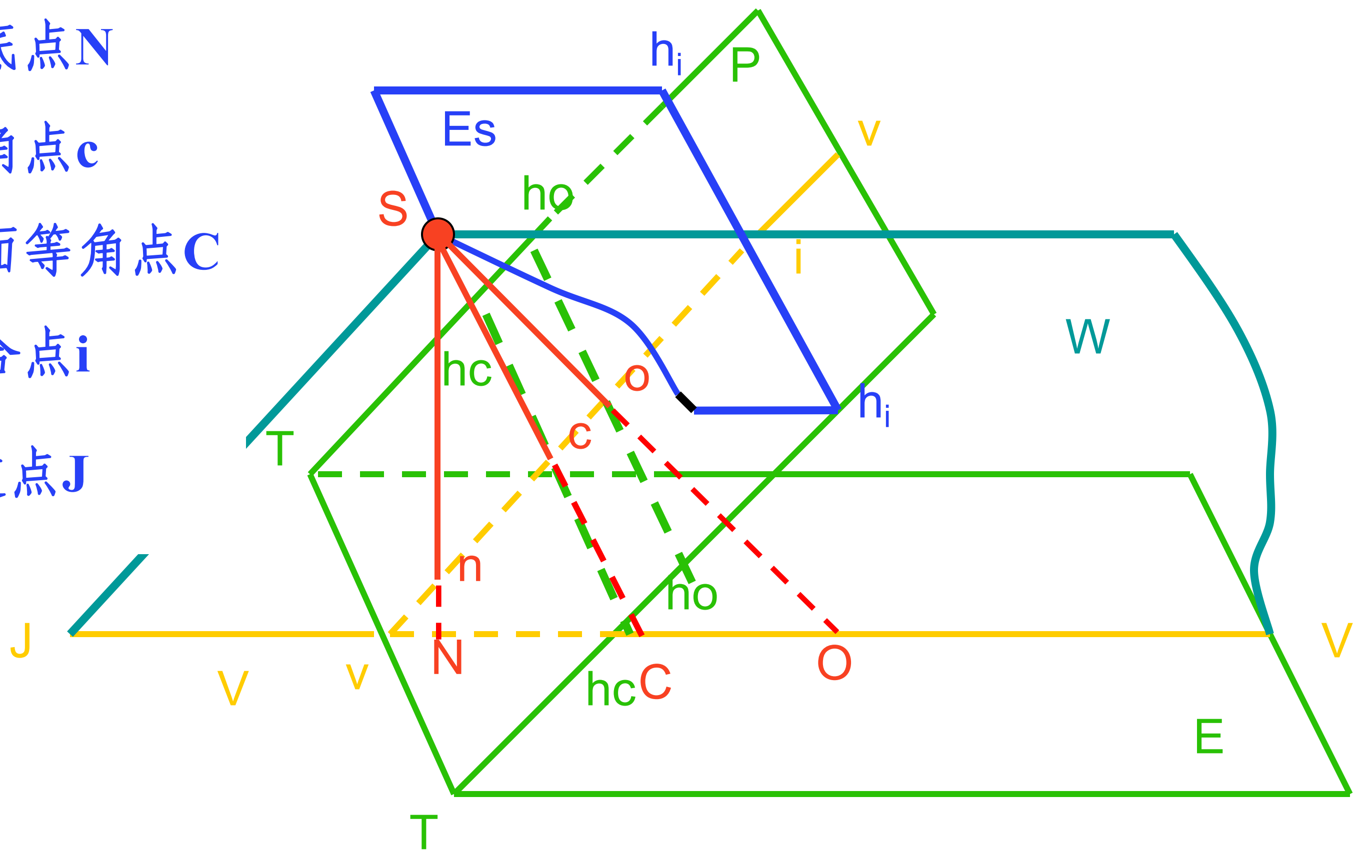
主纵线vv

等角线ScC

主合线h_ih_i

主横线h_oh_o

等比线h_ch_c



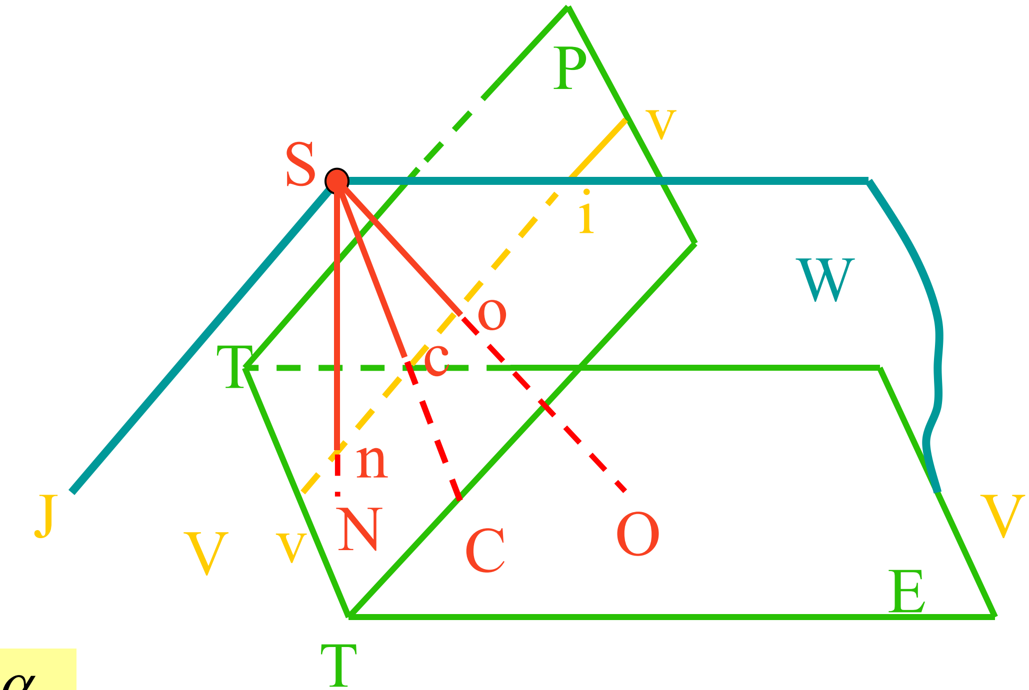
重要

点线的数学关系

$$on = f \cdot tg\,\alpha$$

$$oc = f \cdot tg\,\frac{\alpha}{2}$$

$$oi = f \cdot ctg\,\alpha$$



$$ON = Htg\,\alpha$$

$$CN = Htg\,\frac{\alpha}{2}$$

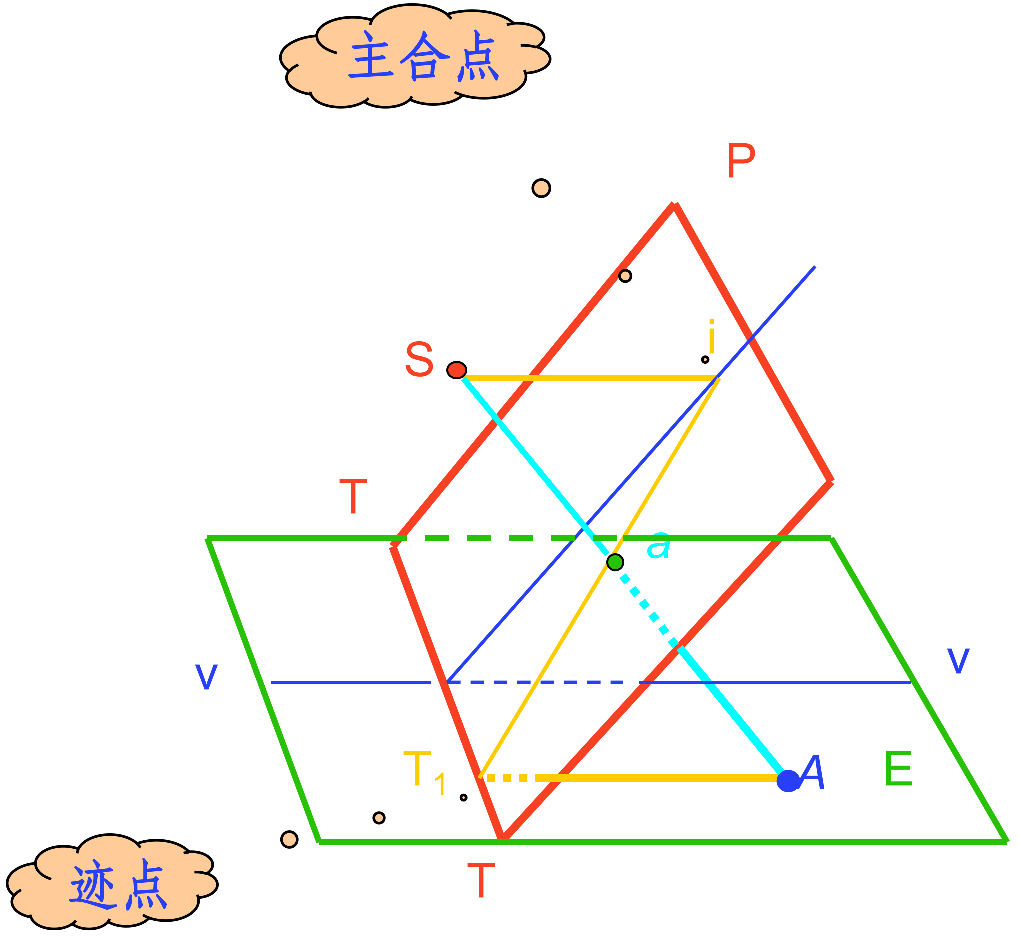
$$Si = ci = \frac{f}{\sin\,\alpha}$$

$$SJ = iV = \frac{H}{\sin\,\alpha}$$

透视变换的练习1

已知 E 平面上有 *A* 点，在像平面上作对应的像 *a*

中心投影作图



作图步骤：

1）找迹点T_1

2）找主合点i

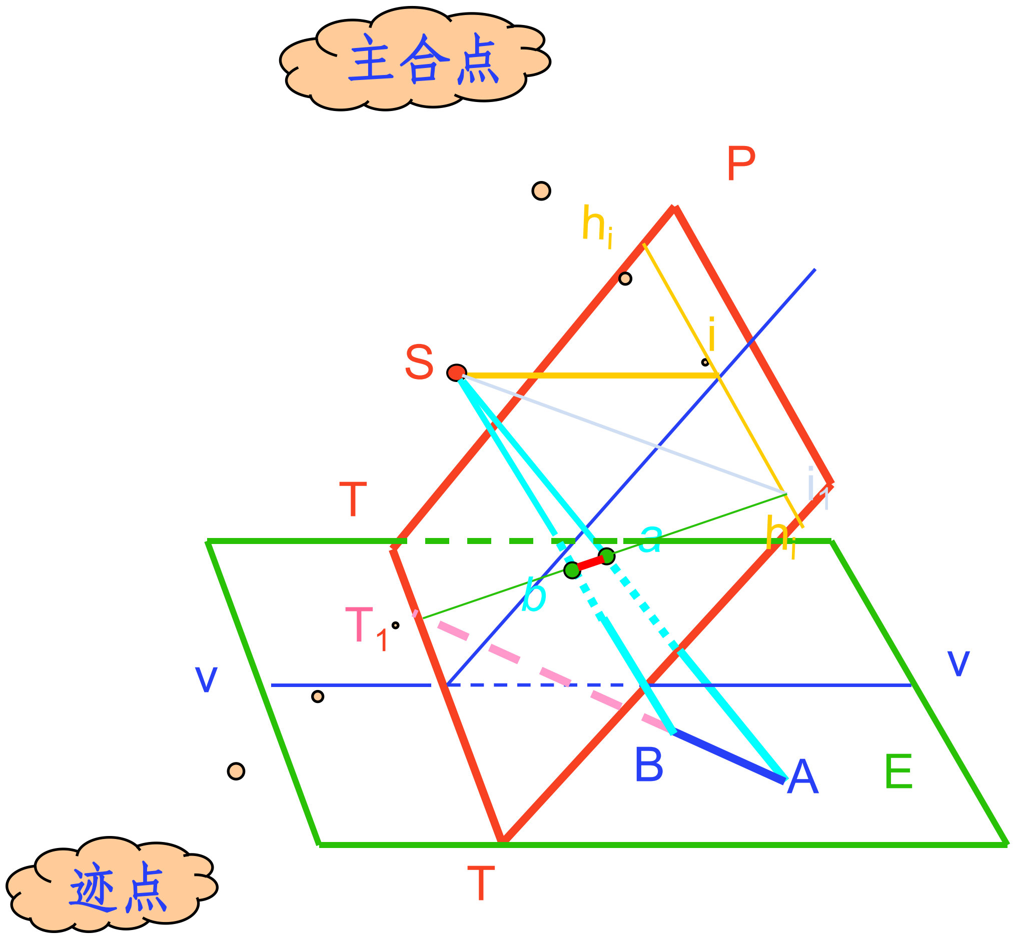
3）连T_1i与SA，

交点为*a*

透视变换的练习2

已知 E 平面上有 *AB* 直线，在像平面上作对应的像 *ab*

中心投影作图



作图步骤：

1）找迹点T_1

2）找合点i_1

3）连T_1i_1与SA，交点为*a*

4）连T_1i_1与SB，交点为*b*

5）*a*与*b* 连线

摄影测量基础知识

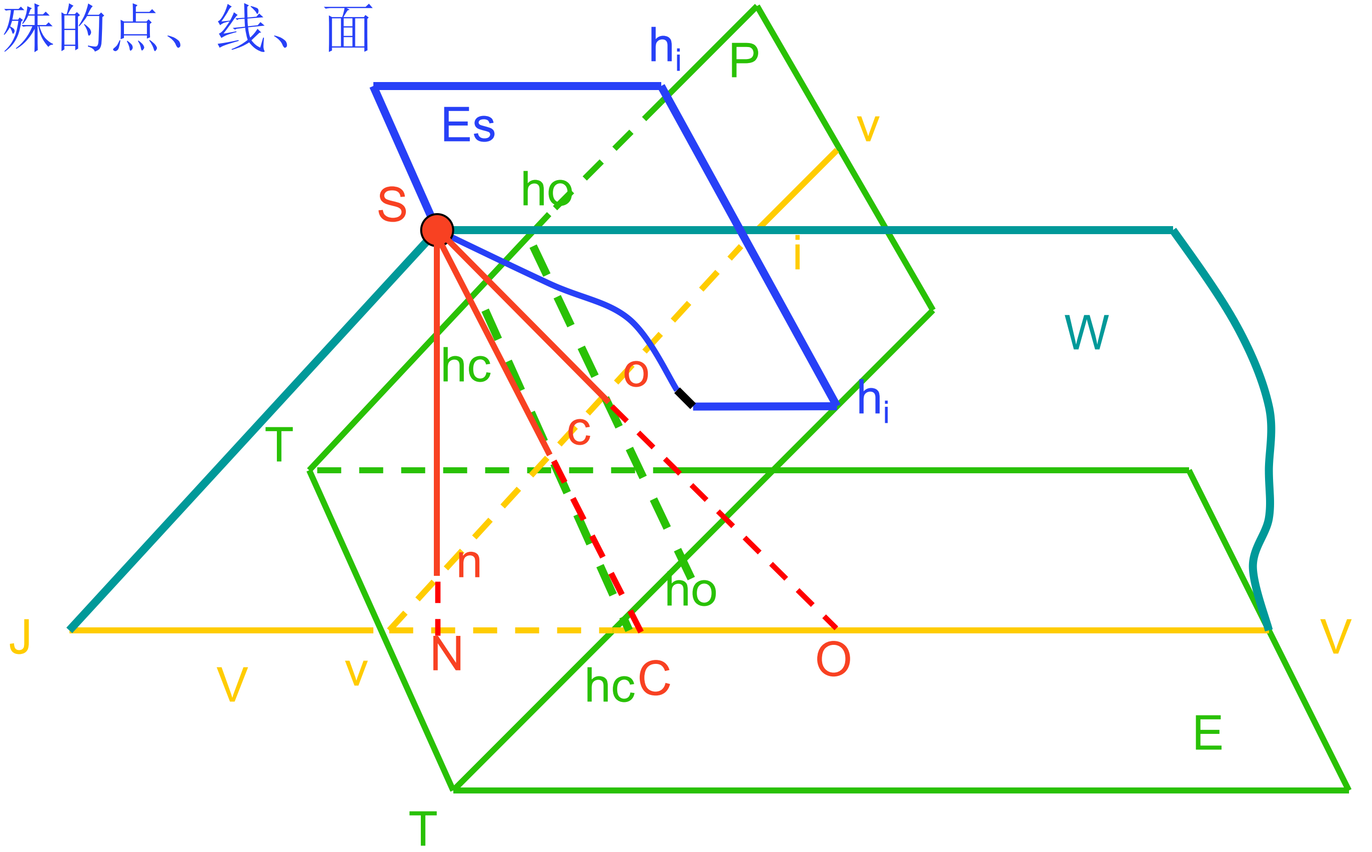
（二）

内容小结

- ✓ 航空摄影

  比例尺、航高、重叠度、旋角等等
- ✓ 中心投影的基本知识

  点、线段、交线段、射线、平行线等的投影
- ✓ 航摄像片上特殊的点、线、面



本节主要内容

一、摄影测量常用的坐标系统

二、航摄像片上的内、外方位元素

三、像点的空间直角坐标变换

3.4 摄影测量中常用的坐标系

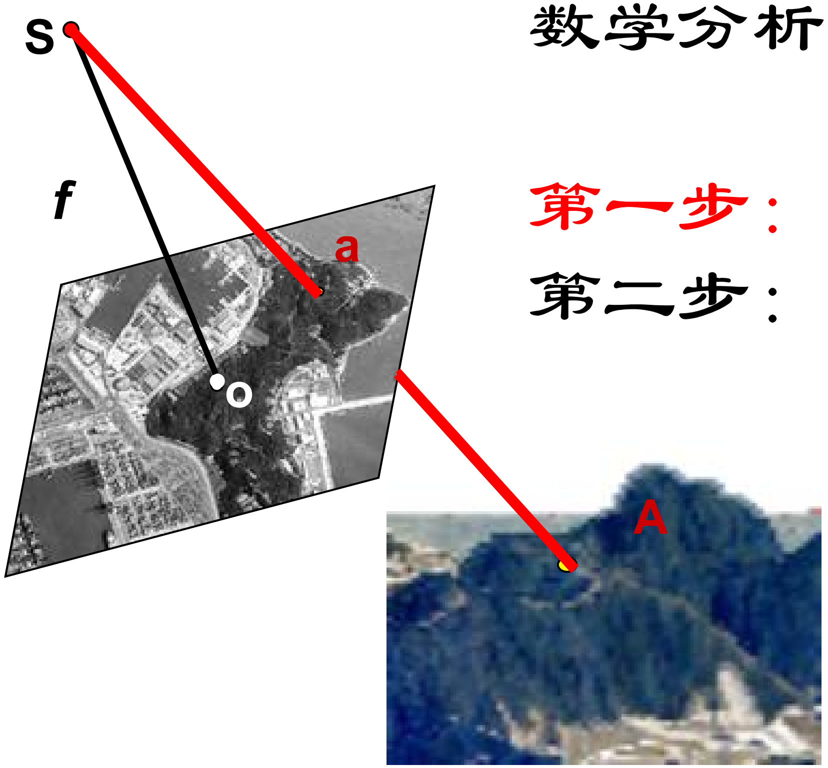
一、像方坐标系

二、物方坐标系

航摄像片是地面的中心投影。

摄影测量的主要任务之一：把地面按中心投影规律获取的摄影比例尺航摄像片转换成以测图比例尺表示的正射投影地形图

如何建立像点与地面点之间的关系？



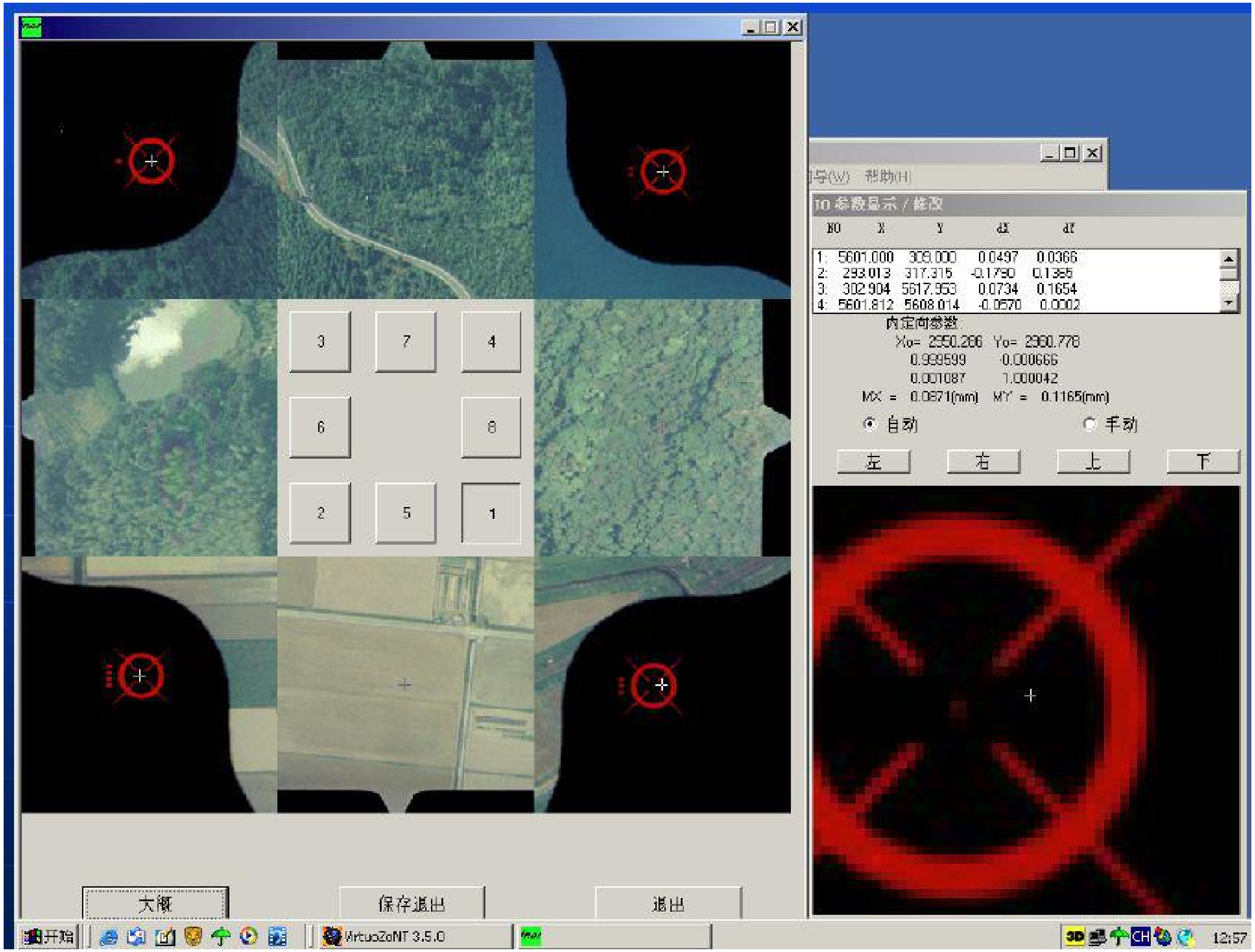
数学分析方法

第一步：数学描述，建立坐标系

第二步：建立关系方程

一 像方坐标系

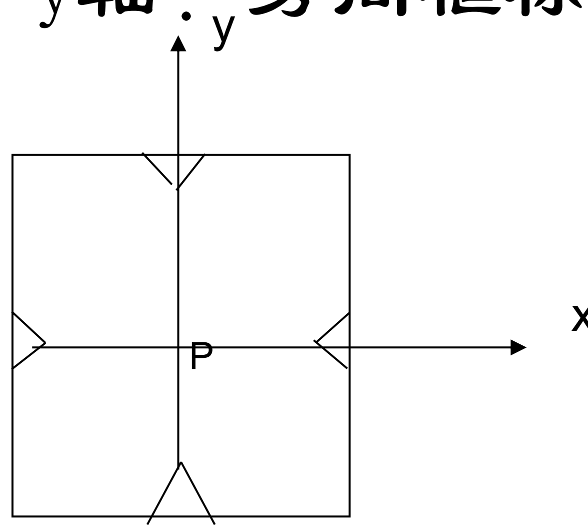
1、影像上的坐标系



（1）框标坐标系

边框标

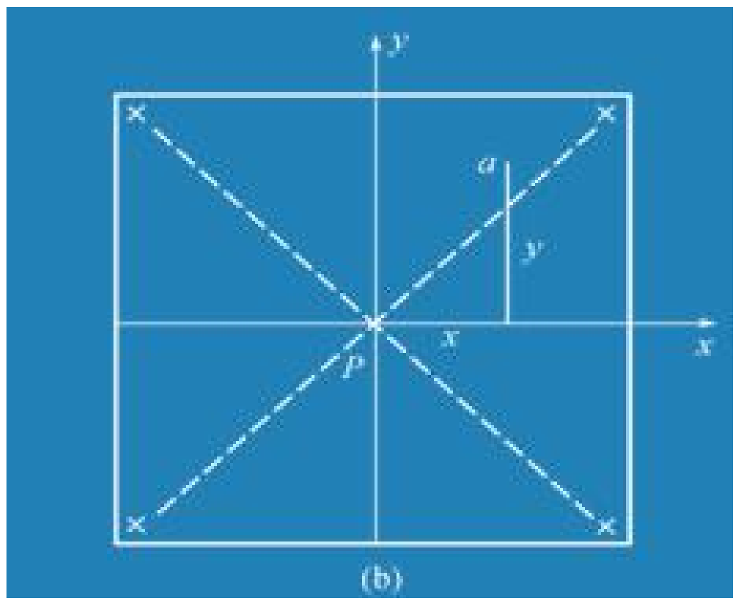
- 原点：框标连线交点P
- x轴：航向框标连线方向
- y轴：旁向框标连线方向



机械框标（或边框标）

角框标

- 原点：框标连线交点P
- x轴：框标连线在航向方向夹角的平分线
- y轴：垂直于x轴的方向作为y轴



(b)

坐标轴的正方向都按右手定则确定。

（2）像平面坐标系(o-xy)

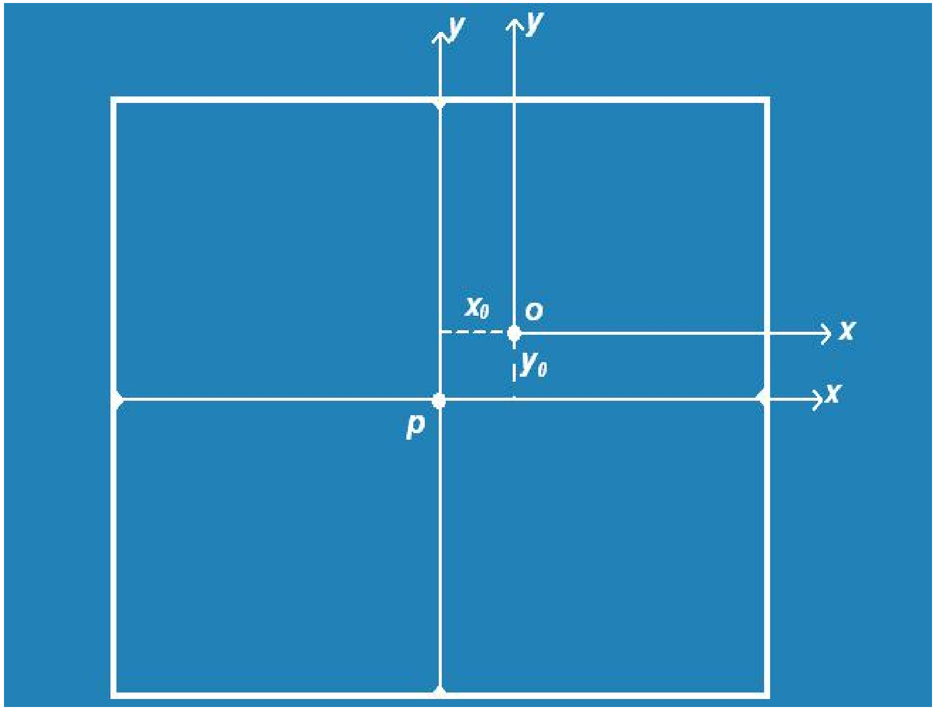
原点： 象主点o

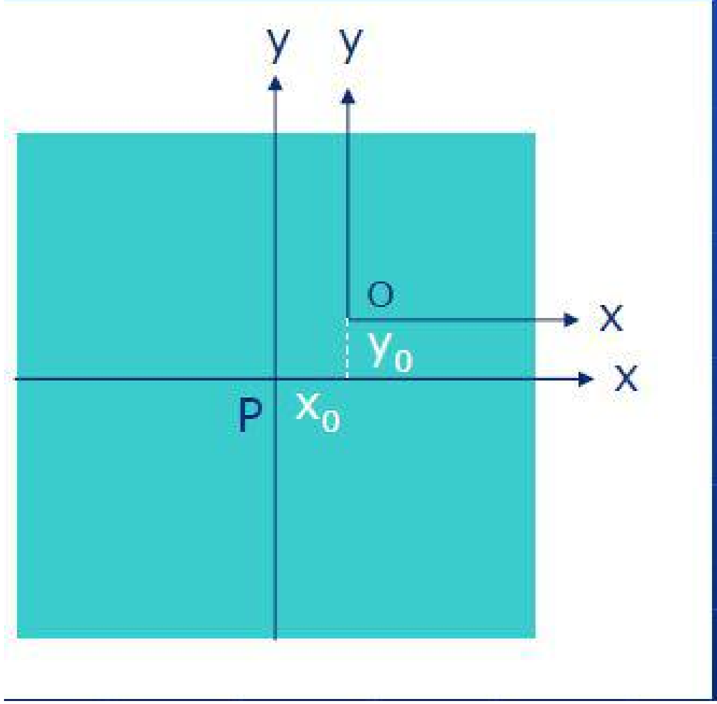
x、y轴分别平行于框标坐标系的x、y轴。

像平面坐标系与框标坐标系的转化：

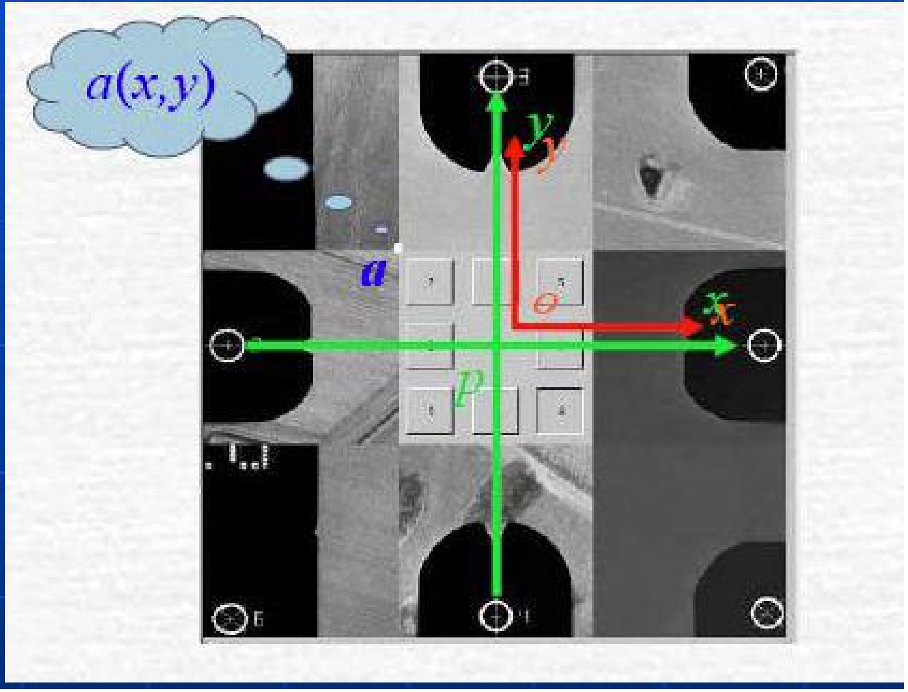
$$x = x' - x_0$$

$$y = y' - y_0$$





y
y
O
x
y0
x
P
x0



a(x,y)
a
y
y'
x
x'
θ
p

（3）影像（扫描）坐标系

原点：影像右上角

水平和垂直轴分别平行于影像的两条边，分别向右、向下

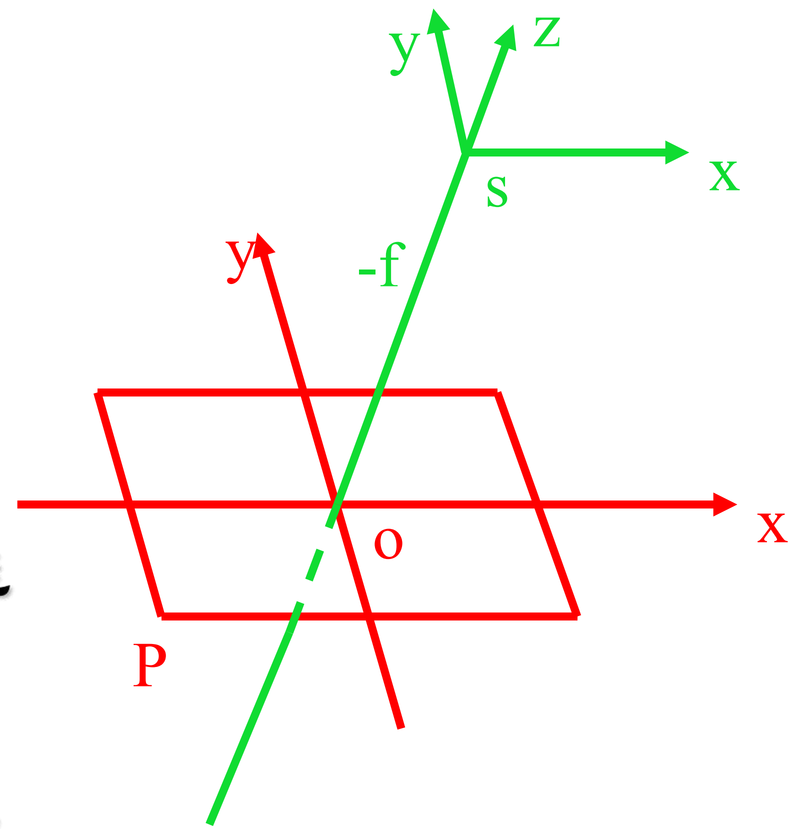
2、像空间直角坐标系 S—xyz

原点：摄影中心S

x, y轴：分别平行于o-xy轴

z轴：摄影方向So，oS方向为正

右手系



已知像点的像平面坐标后，就能获得该像点的像空间直角坐标。

每张像片的像空间直角坐标系是各自独立的。

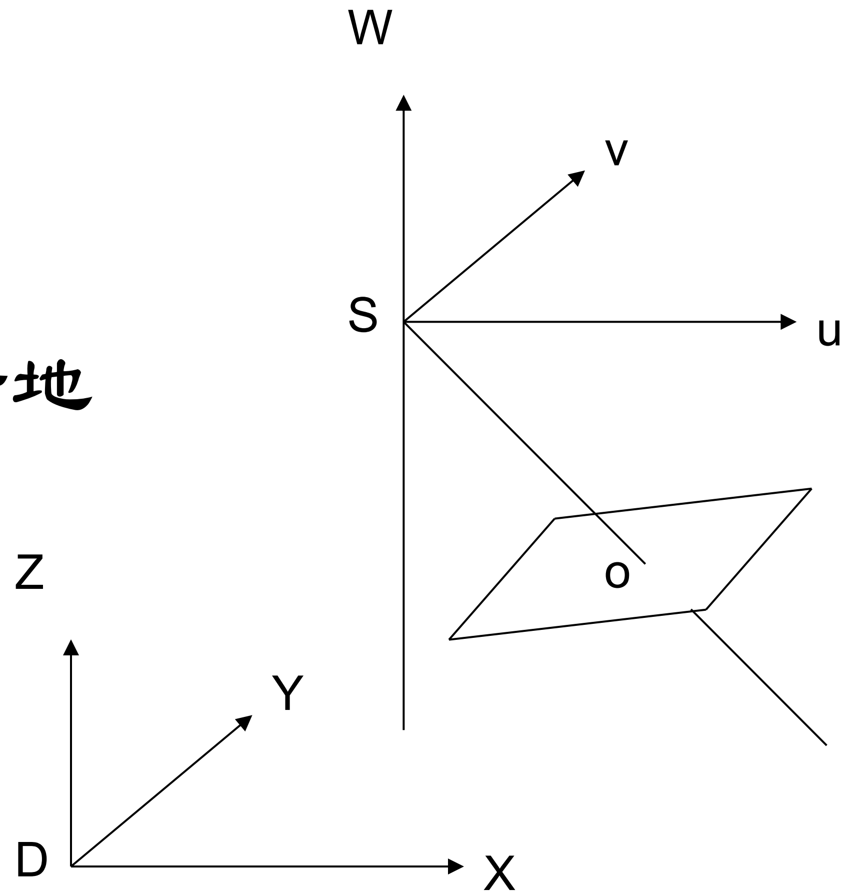
3、像空间辅助坐标系S-uvw

原点：摄站点S

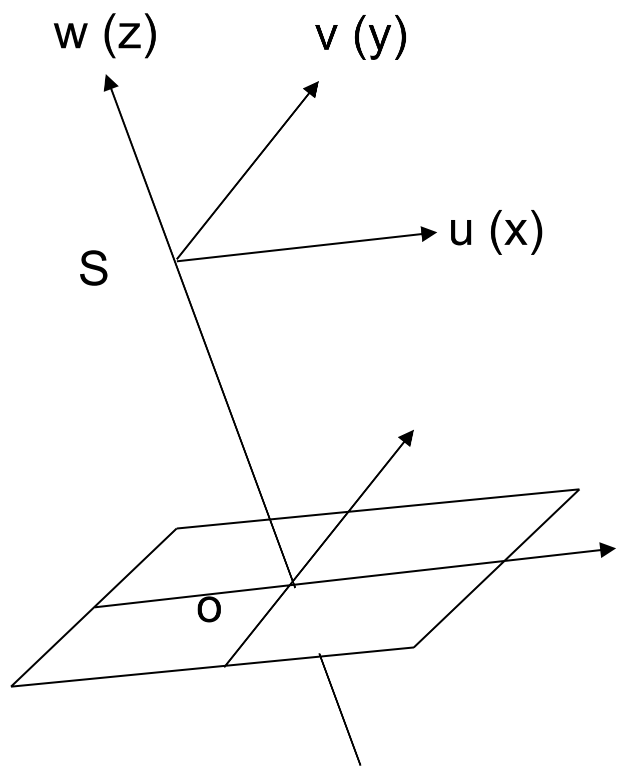
坐标轴可根据需要选定。

第一种：

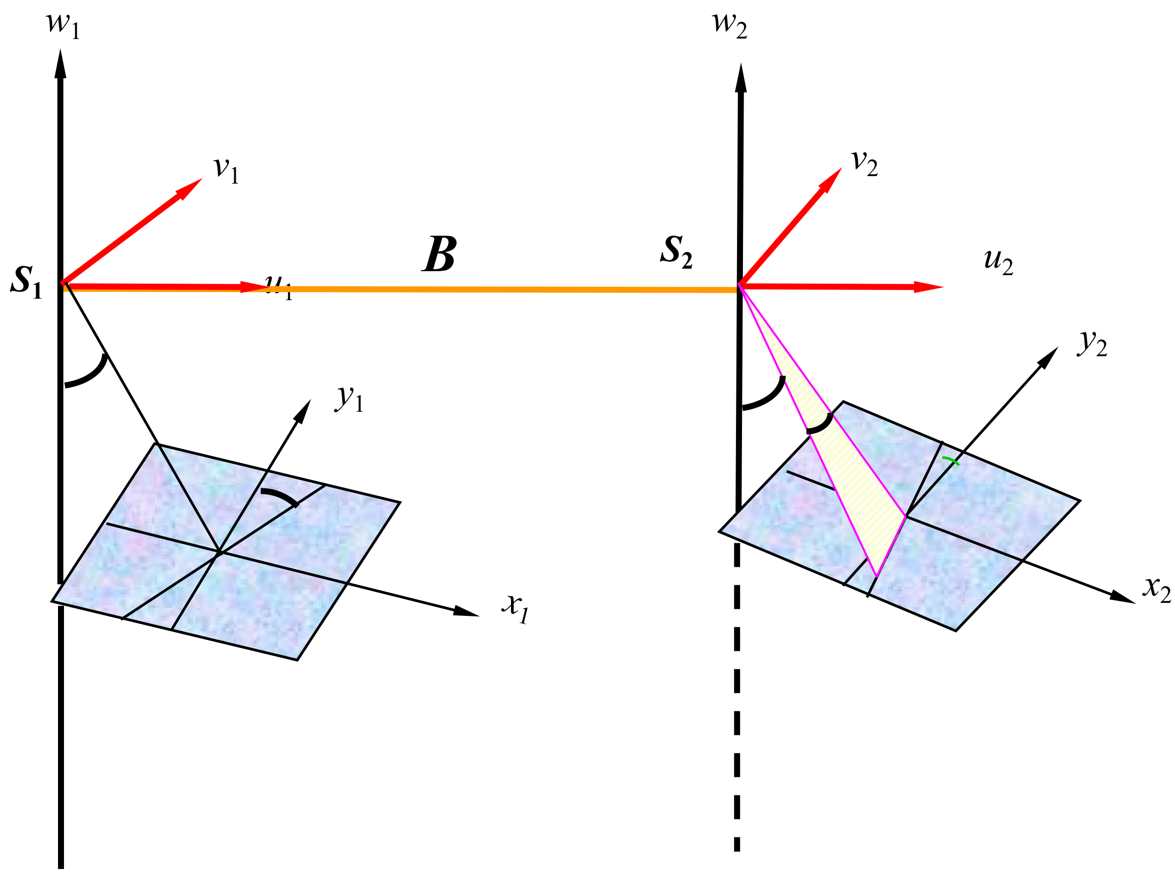
u, v, w轴系分别平行于地面摄影测量坐标系



第二种：以每条航线内第一张像片的像空间坐标系作为像空间辅助坐标系。



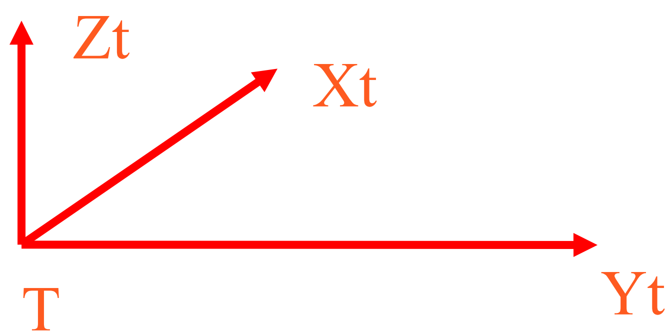
第三种：以每个像片对的左片摄影中心为坐标原点，摄影基线方向为u轴，以摄影基线及左片主光轴构成的面作为uw平面，构成右手直角坐标系。



二 物方坐标系

1、地面测量坐标系（$T\text{-}X_TY_TZ_T$）

地面测量坐标系通常指国家测图所采用的高斯—克吕格3度带或6度带投影的平面直角坐标系（如1980年西安坐标系），及高程坐标系（如1985年黄海高程系），左手系。



2、地面摄影测量坐标系（$D\text{-}X_{tp}Y_{tp}Z_{tp}$）

坐标原点：测区内的其一地面点

X轴：大致平行于航线方向

Z轴：铅垂线方向

右手直角坐标系。

设立原因：像空间辅助坐标系采用的是右手系，而地面测量坐标系采用的是左手系，给像空间辅助坐标系到地面测量坐标的转换带来了困难。为此，建立一种过渡性的坐标系，称为地面摄影测量坐标系。

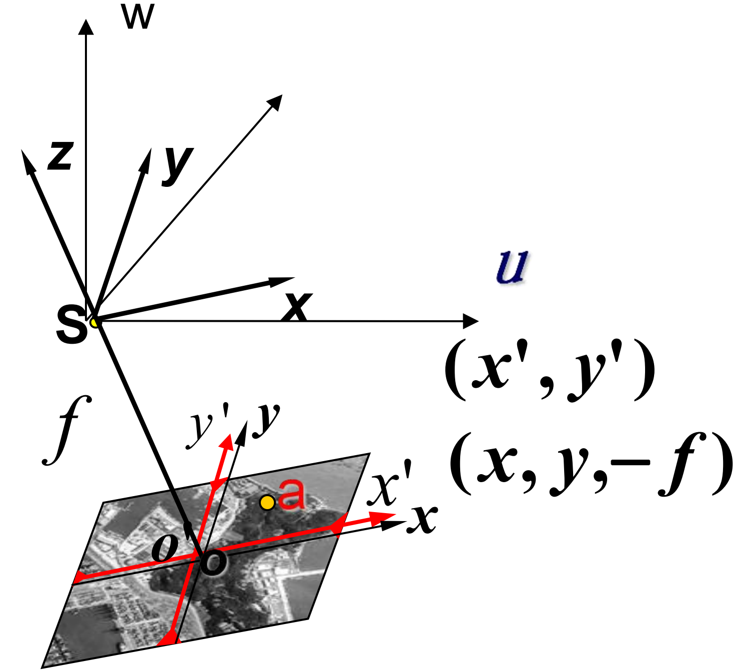
摄影测量中常用的坐标系

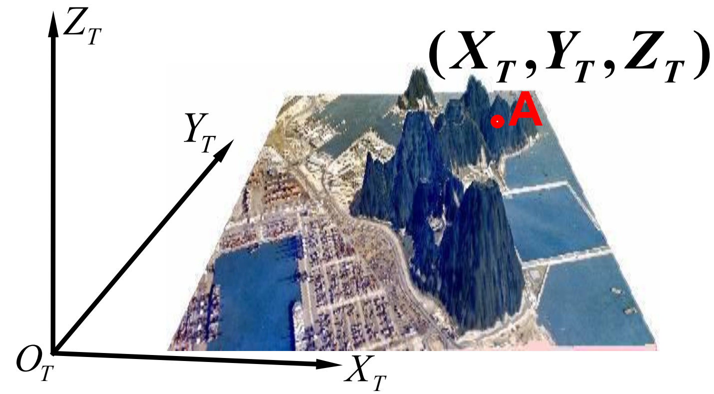
框标坐标系

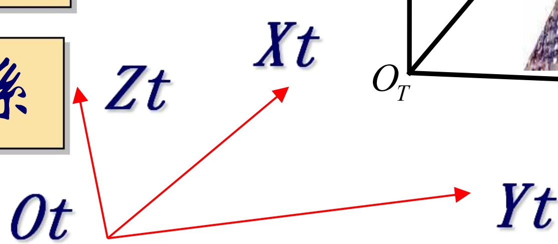
像方
- 像平面坐标系
- 像空间坐标系

像空间辅助坐标系

物方
- 摄影测量坐标系
- 大地测量坐标系







3.5　航摄像片的内、外方位元素

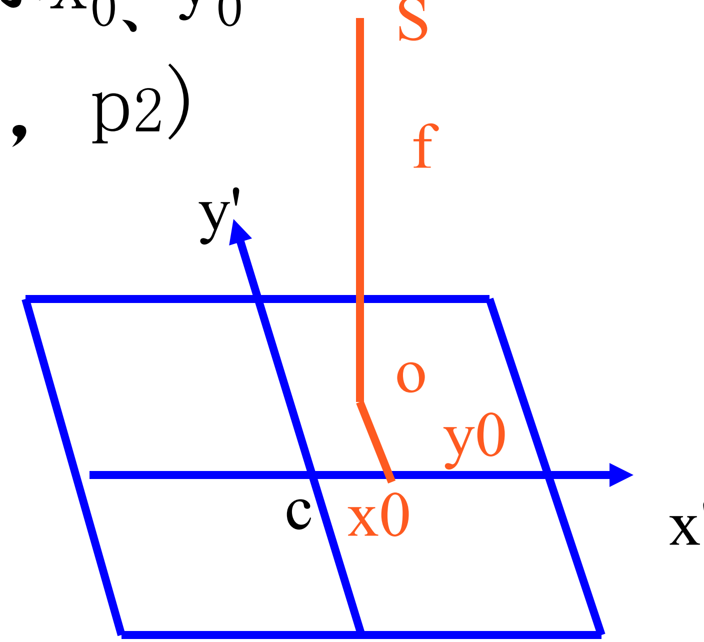
像片的方位元素：确定航空摄影瞬间，摄影中心与像片在地面设定的空间坐标系中的位置与姿态的参数称为像片的方位元素。

分为内方位元素和外方位元素。

一、像片（摄影机）的内方位元素

内方位元素：描述摄影中心与像片之间相关位置的参数

- 摄影机主距（像片主距）f
- 像主点o在框标坐标系中的坐标x_0、y_0
- 相机畸变参数（k0、k1、k2，p1，p2）



注意

- 内方位元素一般是已知的
- x_0，y_0都为小值

二、外方位元素

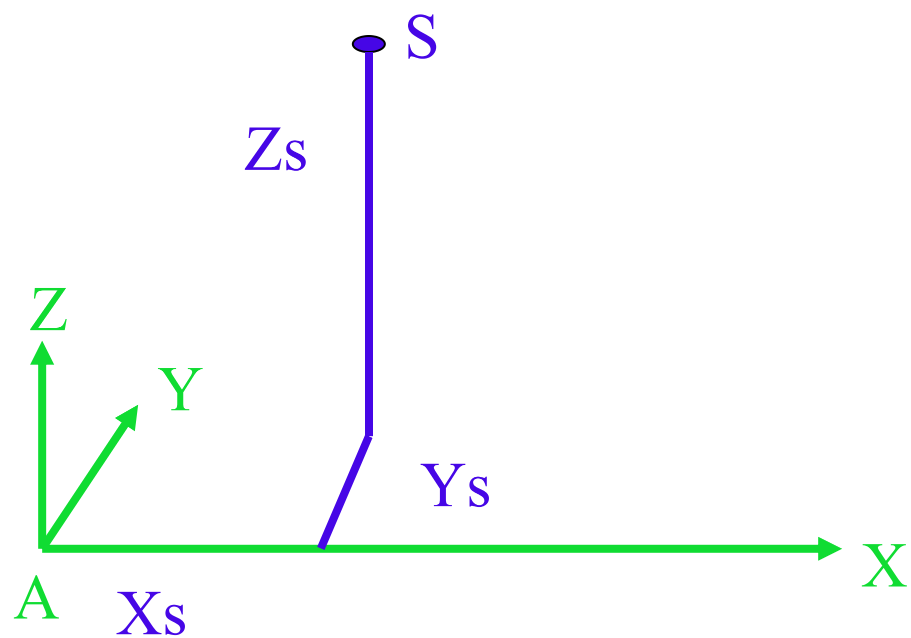
在恢复了内方位元素的基础上，确定像片摄影瞬间在地面坐标系中的位置和姿态的参数

3个线元素　　3个角元素

一张像片有6个外方位元素

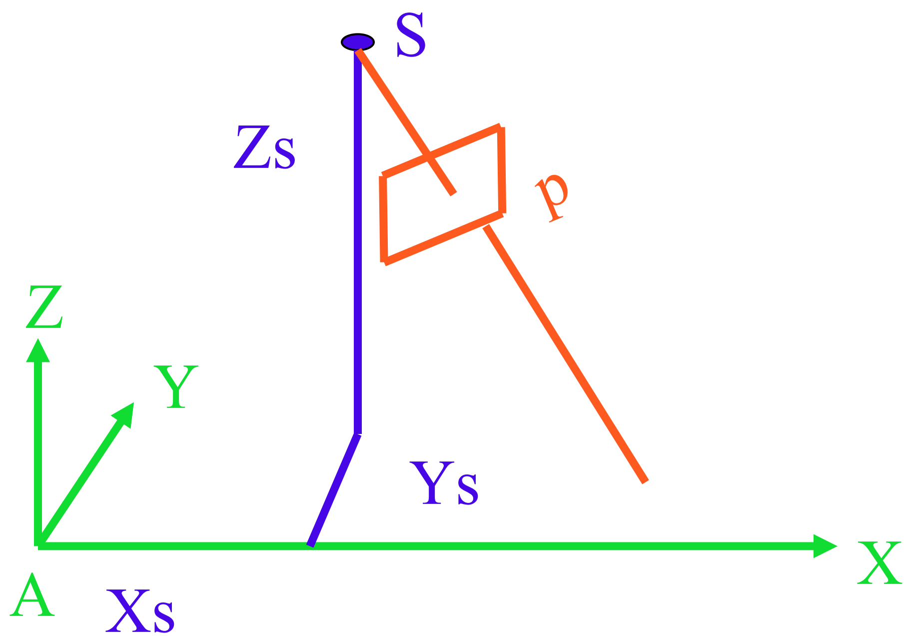
1.外方位线元素

反映摄影瞬间，摄影中心S在选定的地面空间坐标系中的坐标值，用X_S，Y_S，Z_S表示。



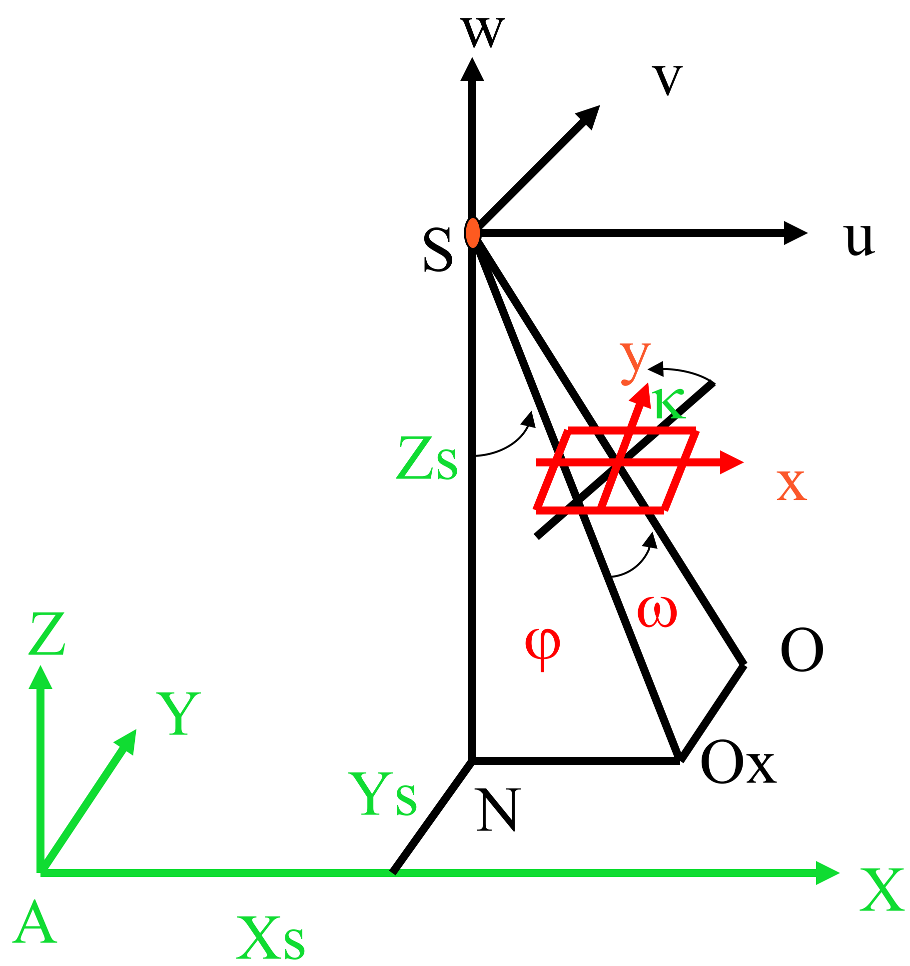
2. 外方位角元素

表达摄影光束的空间姿态，或说像片面的空间姿态。



一般有三种构建角元素的方法：

1）以v轴为主轴的φ、 ω 、 κ

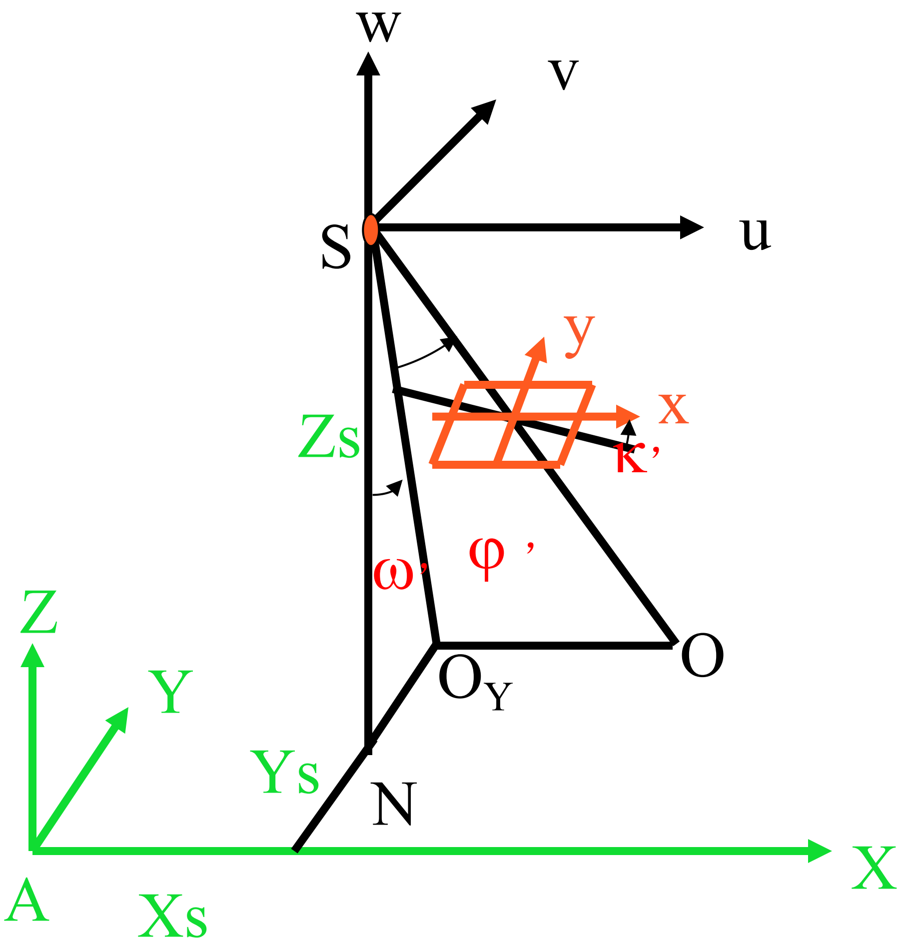


航向倾角φ

旁向倾角ω

像片旋角κ

2）以u轴为主轴的 ω' φ' κ'

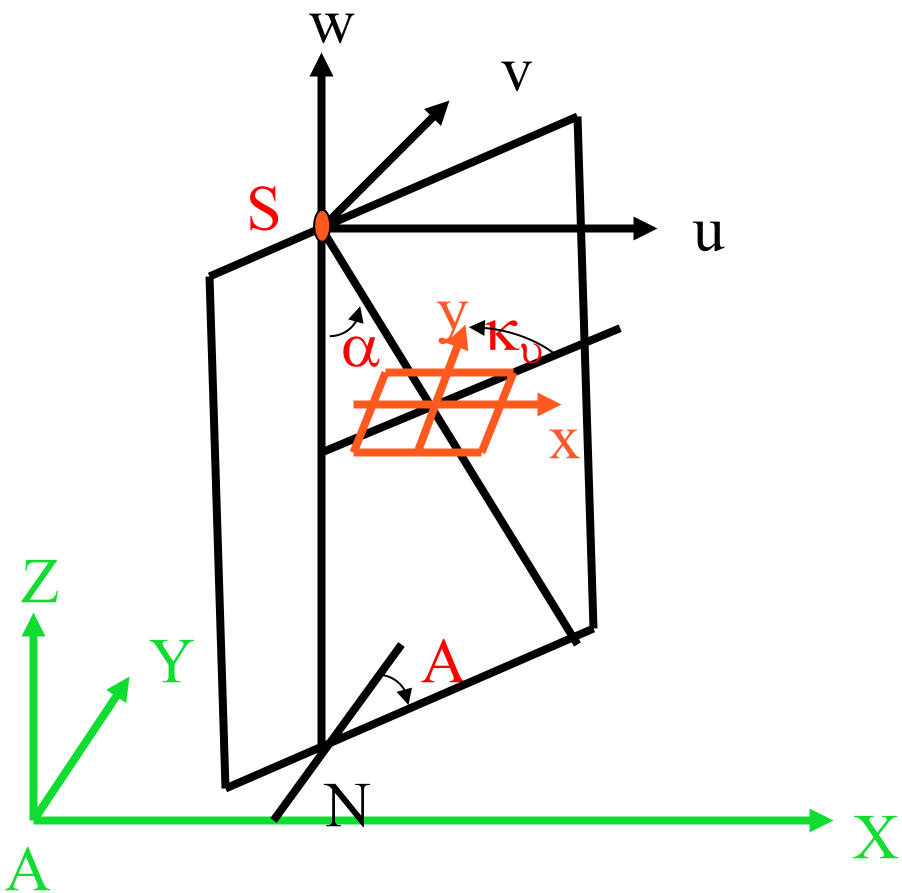


旁向倾角ω'

航向倾角φ'

像片旋角κ'

3）以w轴为主轴的A、α、κν



方位角A

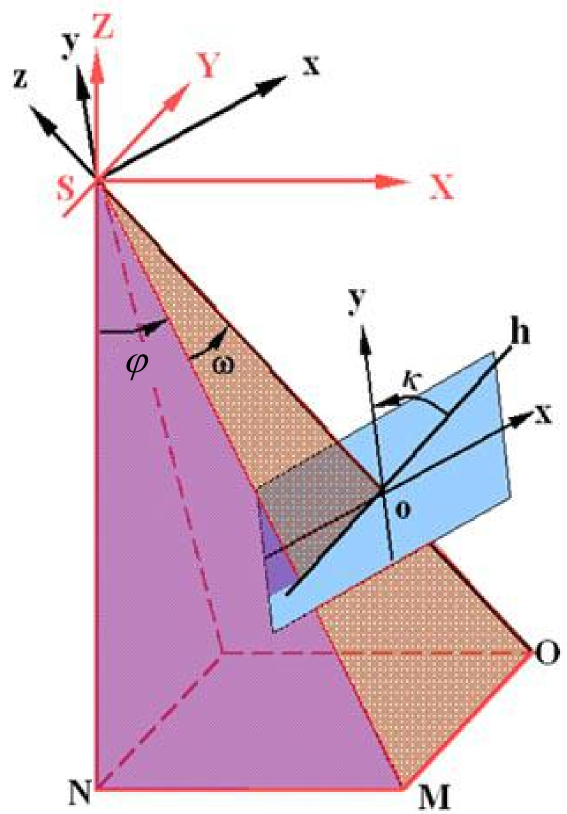
像片倾角α

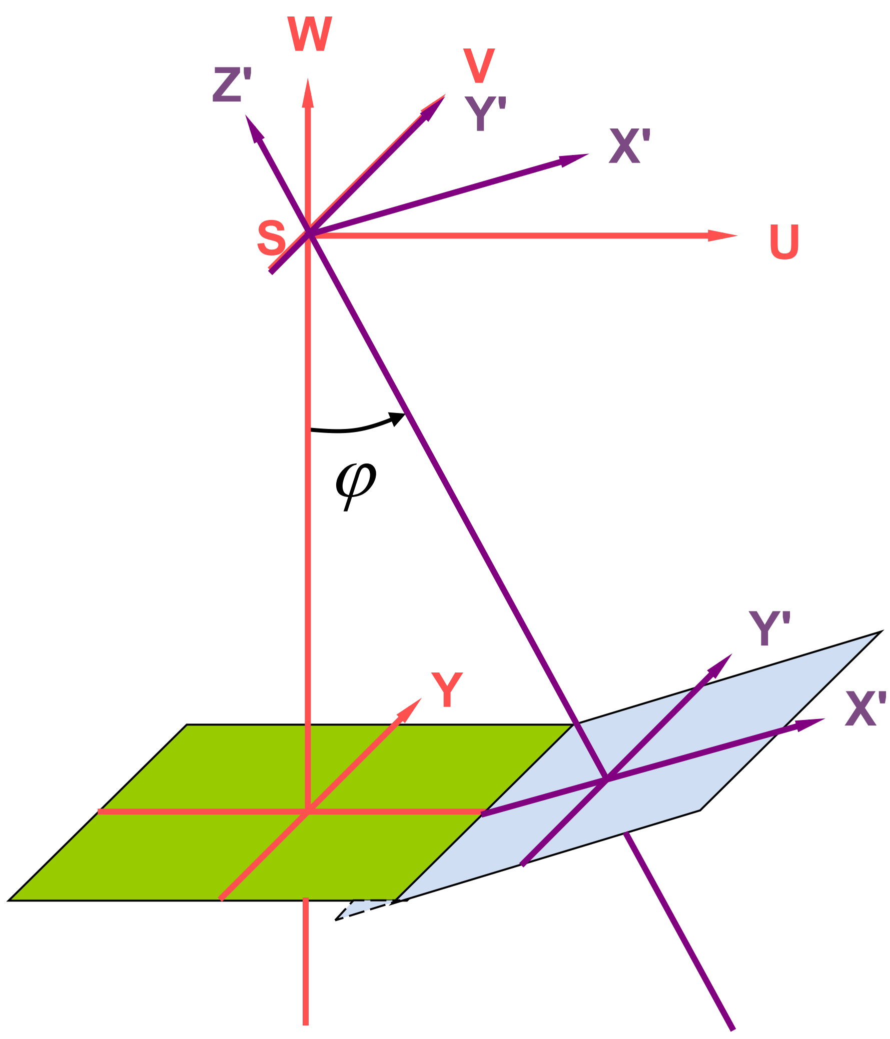
像片旋角κ_ν

以 φ、ω、κ 系统为例

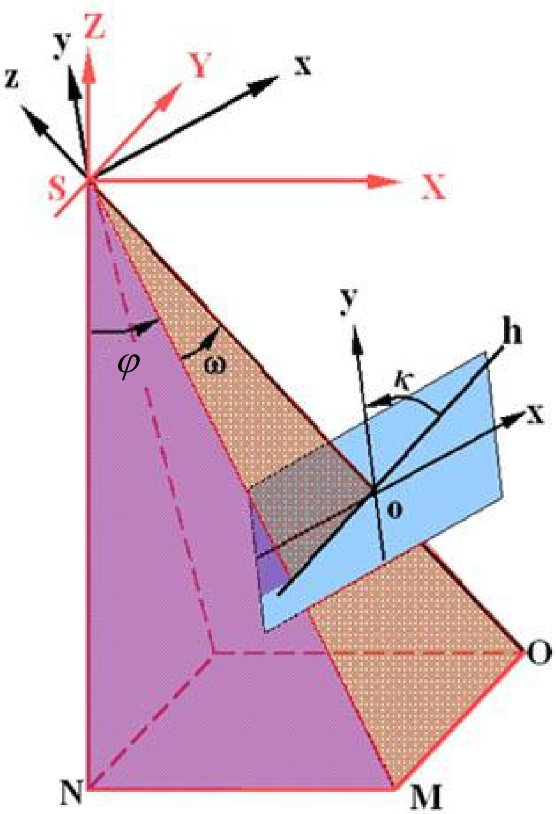
第一次旋转

$$S\text{-}UVW \xrightarrow[\text{绕}V\text{轴}]{\varphi} S\text{-}X'Y'Z'$$

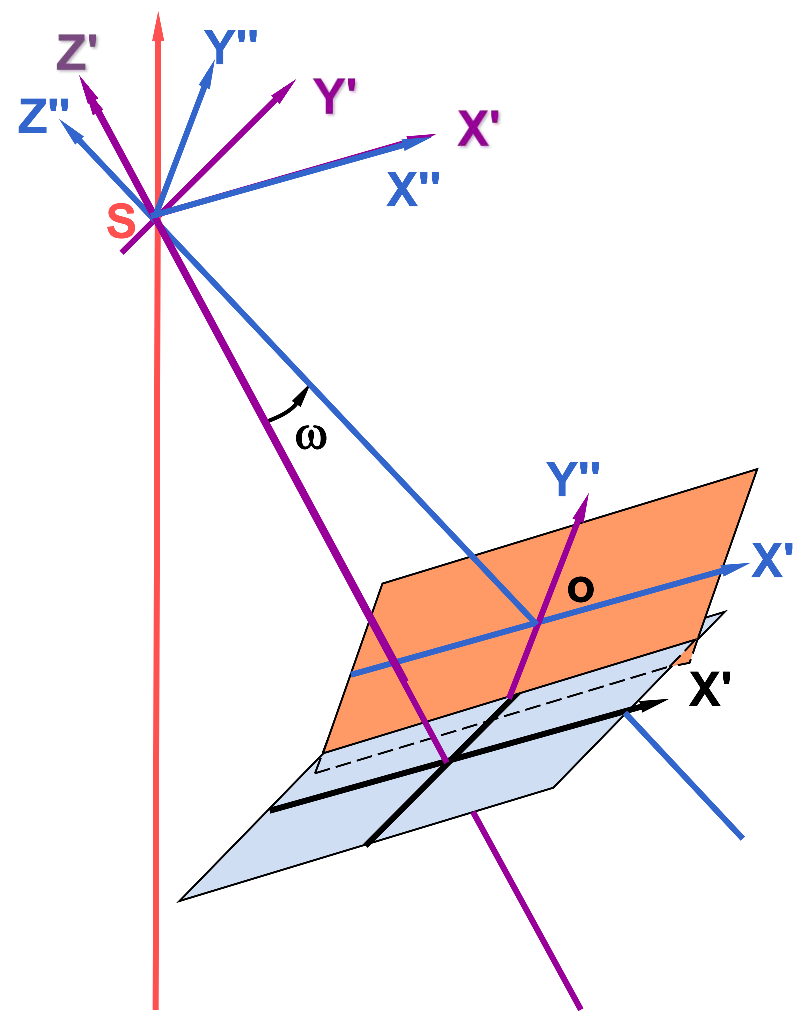




$$S\text{-}X'Y'Z' \xrightarrow[\text{绕 } X'\text{轴}]{\omega} S\text{-}X''Y''Z''$$

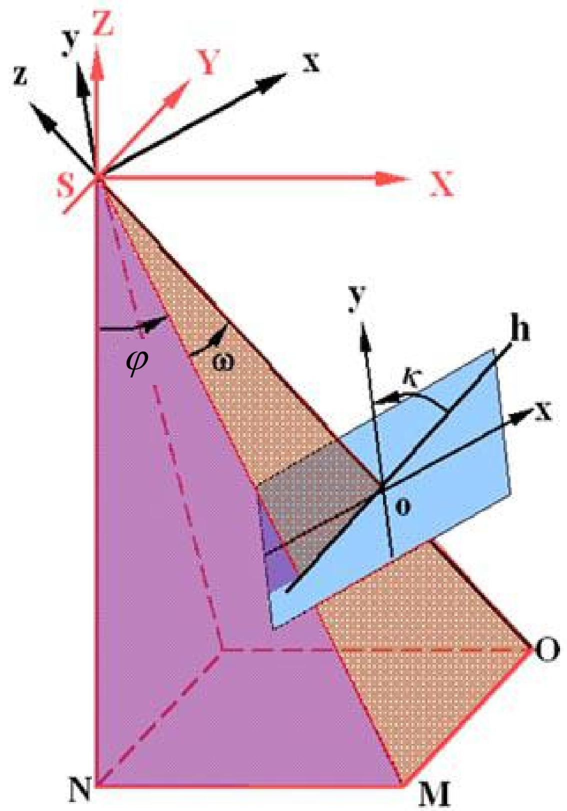


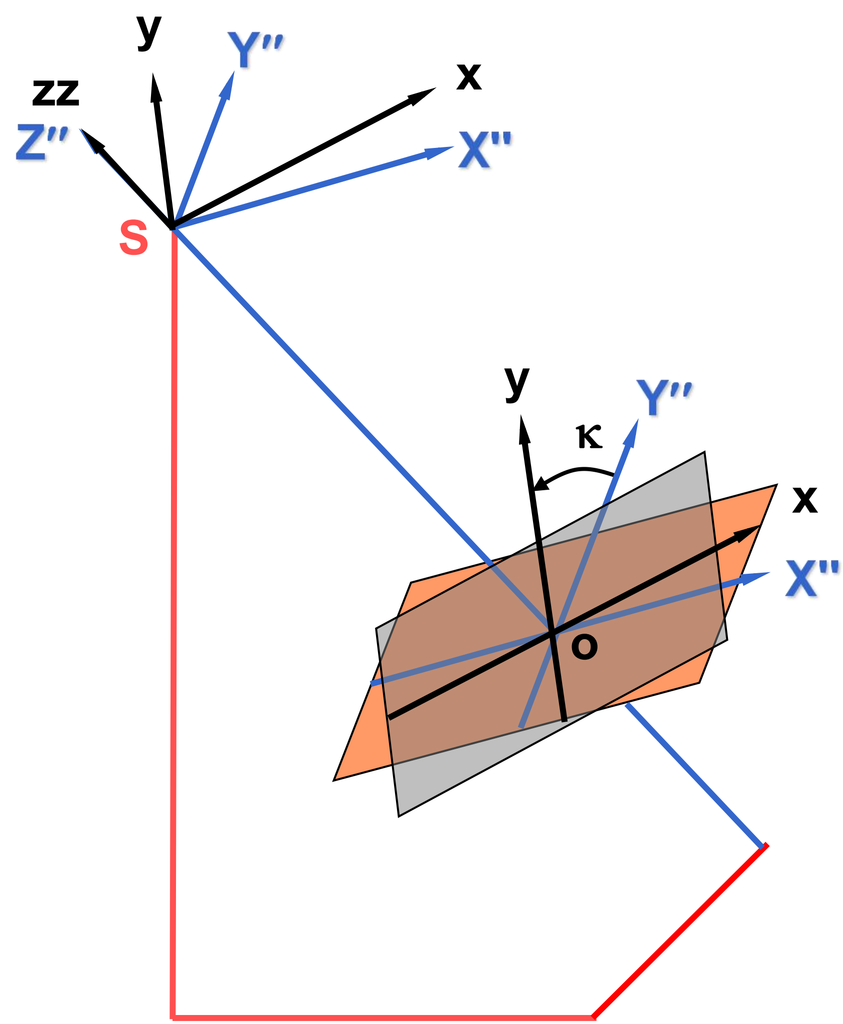
第二次旋转



$$S\text{-}X''Y''Z'' \xrightarrow[\text{绕 } Z'' \text{轴}]{\kappa} S\text{-}xyz$$

第三次旋转



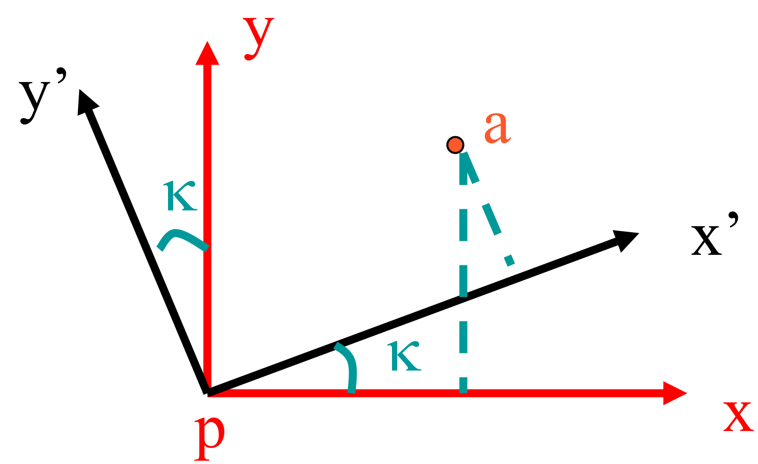


3.6　旋转矩阵的构建方式

一、像点平面坐标变换

1. 原点相同而坐标系轴向不同的平面坐标变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{bmatrix}$$

反算式为：

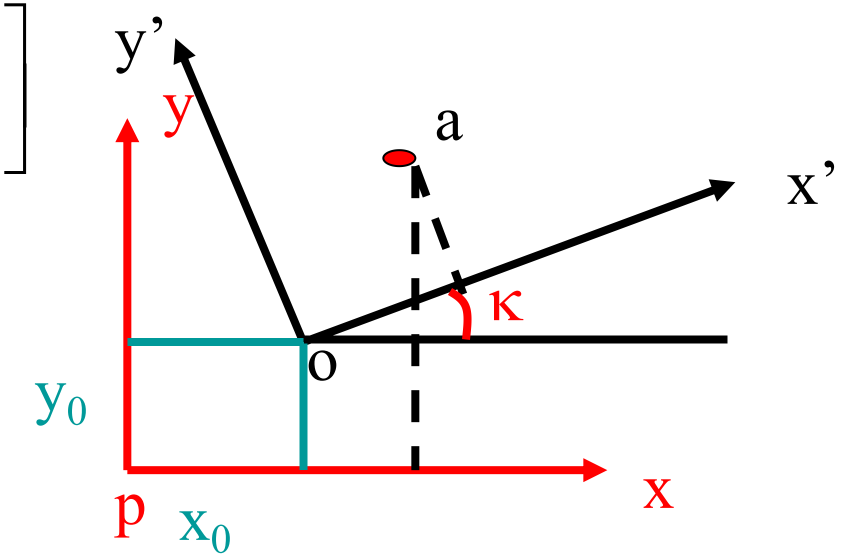
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa \\ -\sin\kappa & \cos\kappa \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = A^{T}$$

2. 原点、坐标系轴向均不同的平面坐标变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$



反算式:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa \\ -\sin\kappa & \cos\kappa \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right)$$

二、像点空间坐标变换

1. 空间直角坐标变换的一般形式

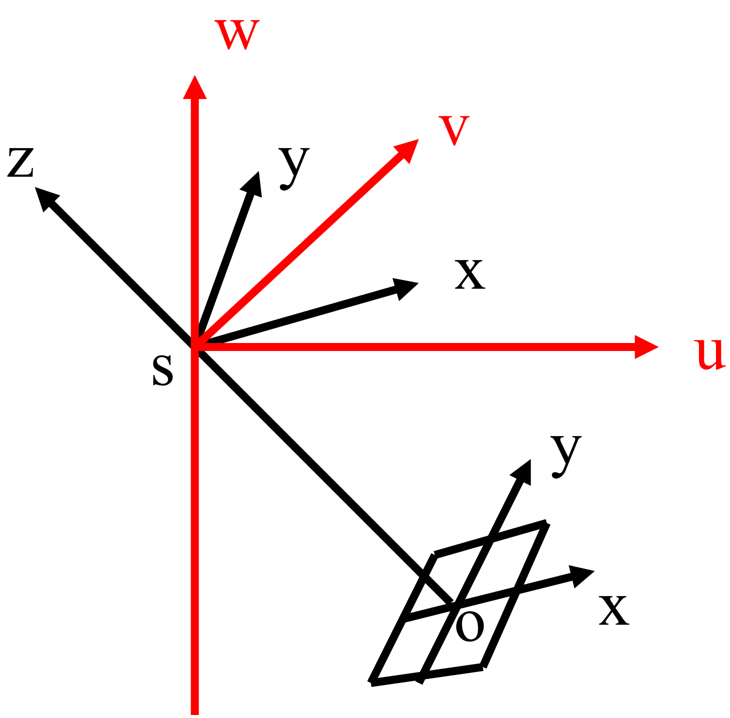
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos X\hat{}X' & \cos X\hat{}Y' & \cos X\hat{}Z' \\ \cos Y\hat{}X' & \cos Y\hat{}Y' & \cos Y\hat{}Z' \\ \cos Z\hat{}X' & \cos Z\hat{}Y' & \cos Z\hat{}Z' \end{bmatrix}$$

R称为旋转矩阵，是一个正交矩阵，由三个独立参数确定

2. 像点的空间直角坐标变换

设某像点a点在像空间直角坐标系中的坐标为 (x, y, z) (z=-f) ，在像空间辅助坐标系中的坐标为 (u, v, w)

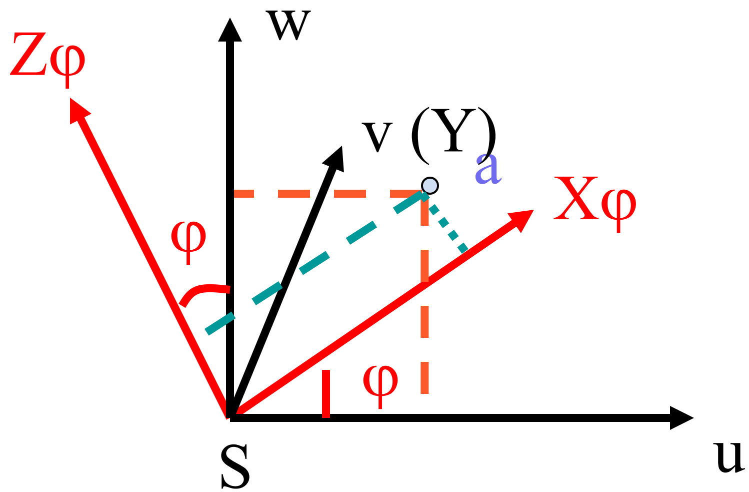


$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R^{T} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

方向余弦的确定

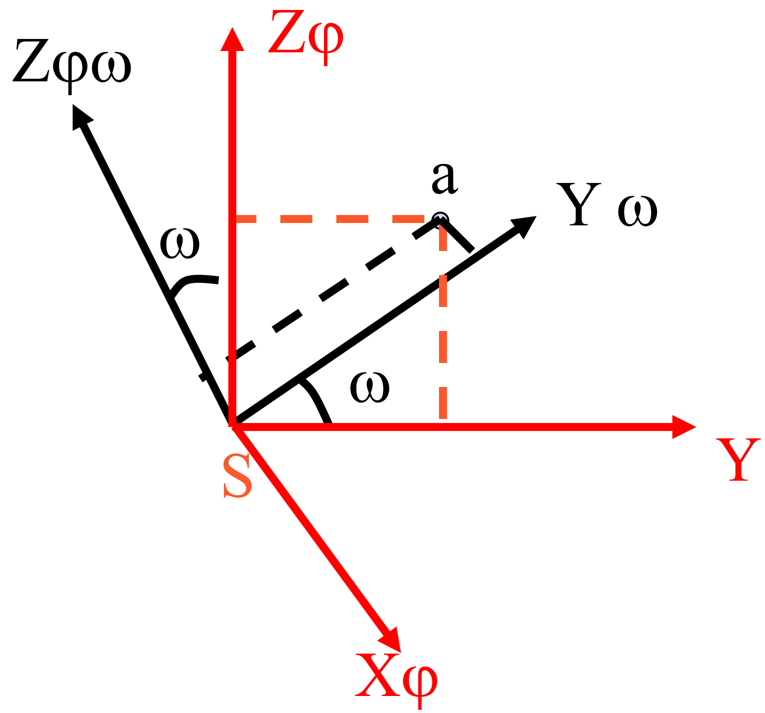
1）以v为主轴的φ、ω、κ系统表示方向余弦



S-uvw绕v轴旋转φ角到S-XφYZφ

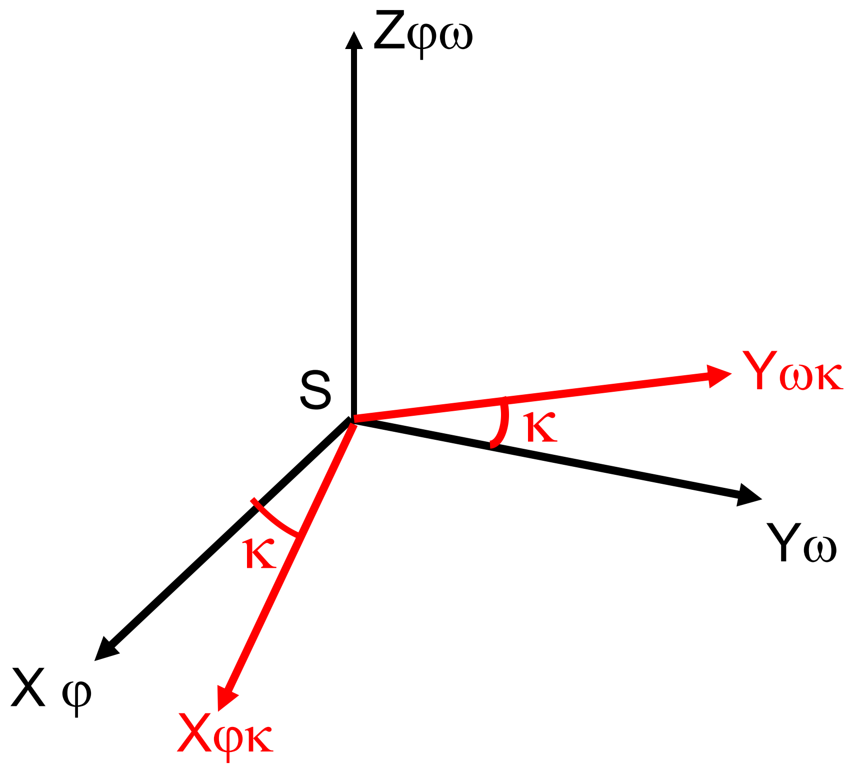
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_\varphi \begin{bmatrix} X\varphi \\ Y \\ Z\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X\varphi \\ Y \\ Z\varphi \end{bmatrix}$$

S-XφYZφ绕Xφ轴旋转ω角到S-XφYωZφω



$$\begin{bmatrix} X\varphi \\ Y \\ Z\varphi \end{bmatrix} = R\omega \begin{bmatrix} X\varphi \\ Y\omega \\ Z\varphi\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X\varphi \\ Y\omega \\ Z\varphi\omega \end{bmatrix}$$

S-XφYωZφω绕Zφω轴旋转角κ到S-XφκYωκZφω(s-xyz)



$$\begin{bmatrix} X\varphi \\ Y\omega \\ Z\varphi\omega \end{bmatrix} = R\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

以v为主轴的φ、ω、κ系统表示方向余弦

小结：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_\varphi R_\omega R_\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

$$R = R_\varphi R_\omega R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

因此，像点在两个坐标系中的变换公式为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_\varphi R_\omega R_\kappa \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \cos\varphi\cos\kappa - \sin\varphi\sin\omega\sin\kappa$$

$$a_2 = -\cos\varphi\sin\kappa - \sin\varphi\sin\omega\cos\kappa$$

$$a_3 = -\sin\varphi\cos\omega$$

$$b_1 = \cos\omega\sin\kappa$$

$$b_2 = \cos\omega\cos\kappa$$

$$b_3 = -\sin\omega$$

$$c_1 = \sin\varphi\cos\kappa + \cos\varphi\sin\omega\sin\kappa$$

$$c_2 = -\sin\varphi\sin\kappa + \cos\varphi\sin\omega\cos\kappa$$

$$c_3 = \cos\varphi\cos\omega$$

若已经求出旋转矩阵中的九个元素值，则可以求出相应的角元素

$$\tan\varphi = -\frac{a_3}{c_3}$$

$$\sin\omega = -b_3$$

$$\tan\kappa = \frac{b_1}{b_2}$$

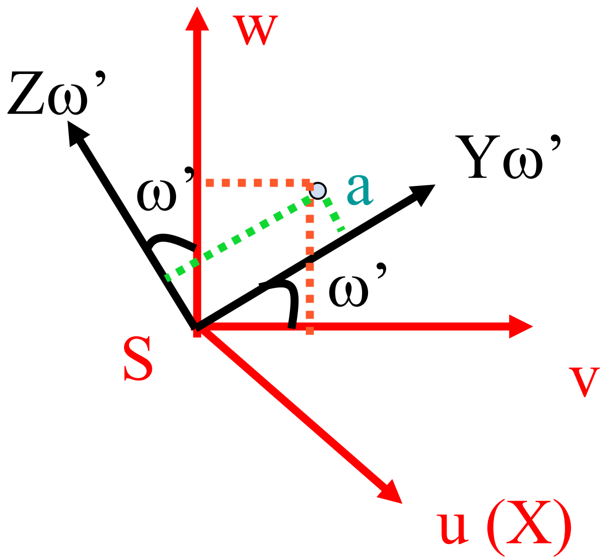
规律：

只要知道转角绕轴旋转的先后顺序，就能很快写出总的旋转矩阵，即为每个旋转矩阵的连乘。

每个旋转矩阵中，绕某轴旋转时，与该轴相对应的三维矩阵中对应位置的元素为1，与其它轴的方向余弦为0，其余的则为平面旋转变化。

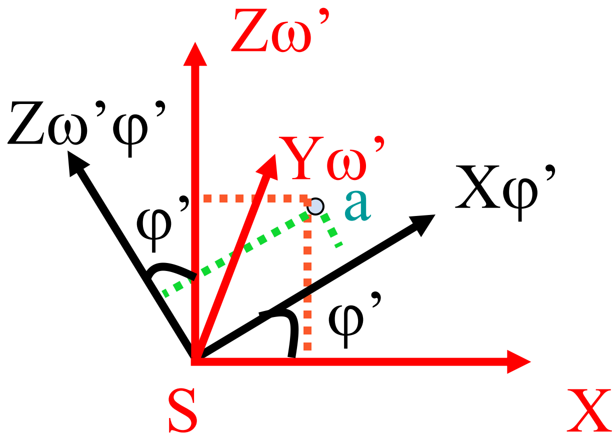
2）以u轴为主轴的ω'、φ'、κ'系统的坐标变换

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_{\omega'} R_{\varphi'} R_{\kappa'} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = R' \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$



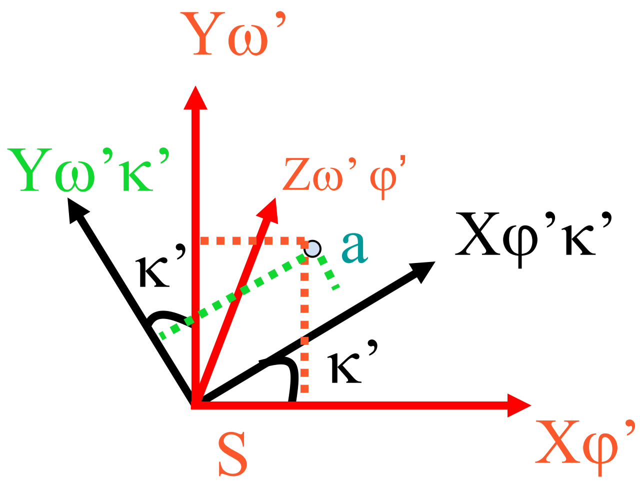
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_{\omega'} \begin{bmatrix} X \\ Y_{\omega'} \\ Z_{\omega'} \end{bmatrix}$$

$$R_{\omega'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega' & -\sin\omega' \\ 0 & \sin\omega' & \cos\omega' \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} X \\ Y_{\omega'} \\ Z_{\omega'} \end{bmatrix} = R\varphi' \begin{bmatrix} X_{\varphi'} \\ Y_{\omega'} \\ Z_{\omega'\varphi'} \end{bmatrix}$$

$$R\varphi' = \begin{bmatrix} \cos\varphi' & 0 & -\sin\varphi' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi' & 0 & \cos\varphi' \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} X_{\varphi'} \\ Y_{\omega'} \\ Z_{\omega'\varphi'} \end{bmatrix} = R\kappa' \begin{bmatrix} X_{\varphi'\kappa'} \\ Y_{\omega'\kappa''} \\ Z_{\omega'\varphi'} \end{bmatrix}$$

$$R\kappa' = \begin{bmatrix} \cos\kappa' & -\sin\kappa' & 0 \\ \sin\kappa' & \cos\kappa' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R\omega' R\varphi' R\kappa' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega' & -\sin\omega' \\ 0 & \sin\omega' & \cos\omega' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi' & 0 & -\sin\varphi' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi' & 0 & \cos\varphi' \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos\kappa' & -\sin\kappa' & 0 \\ \sin\kappa' & \cos\kappa' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \cos\varphi'\cos\kappa'$$
$$a_2 = -\cos\varphi'\sin\kappa'$$
$$a_3 = -\sin\varphi'$$
$$b_1 = \cos\omega'\sin\kappa' - \sin\omega'\sin\varphi'\cos\kappa'$$
$$b_2 = \cos\omega'\cos\kappa' + \sin\omega'\sin\varphi'\sin\kappa'$$
$$b_3 = -\sin\omega'\cos\varphi'$$
$$c_1 = \sin\omega'\sin\kappa' + \cos\omega'\sin\varphi'\cos\kappa'$$
$$c_2 = \sin\omega'\cos\kappa' - \cos\omega'\sin\varphi'\sin\kappa'$$
$$c_3 = \cos\varphi'\cos\omega'$$

$$\tan\omega' = -\frac{b_3}{c_3}$$

$$\sin\varphi' = -a_3$$

$$\tan\kappa' = -\frac{a_2}{a_1}$$

3）以w轴为主轴的Aακv系统的坐标变换

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = R_A R_\alpha R_{\kappa v} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

$$R = R_A R_\alpha R_{\kappa v} = \begin{bmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\kappa v & -\sin\kappa v & 0 \\ \sin\kappa v & \cos\kappa v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \cos A \cos \kappa v + \sin A \cos \alpha \sin \kappa v$$
$$a_2 = -\cos A \sin \kappa v + \sin A \cos \alpha \cos \kappa v$$
$$a_3 = -\sin A \sin \alpha$$
$$b_1 = -\sin A \cos \kappa v + \cos A \cos \alpha \sin \kappa v$$
$$b_2 = \sin A \sin \kappa v + \cos A \cos \alpha \cos \kappa v$$
$$b_3 = -\cos A \sin \alpha$$
$$c_1 = \sin \alpha \sin \kappa v$$
$$c_2 = \sin \alpha \cos \kappa v$$
$$c_3 = \cos \alpha$$

$$\tan A = \frac{a_3}{b_3}$$

$$\cos \alpha = c_3$$

$$\tan \kappa_\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

三、旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

旋转矩阵是一个正交矩阵

旋转
矩阵
性质

$$R\cdot R^T=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T\cdot R=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三、旋转矩阵

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

旋转矩阵是一个正交矩阵

旋转矩阵性质

$$R \cdot R^T = \mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \\ & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \end{aligned}$$

三、旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

旋转矩阵是一个正交矩阵

旋转矩阵性质

$$R^T \cdot R = \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1^{\ 2}+b_1^{\ 2}+c_1^{\ 2} &= 1 \\ a_2^{\ 2}+b_2^{\ 2}+c_2^{\ 2} &= 1 \\ a_3^{\ 2}+b_3^{\ 2}+c_3^{\ 2} &= 1 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 &= 0 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 &= 0 \\ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 &= 0 \end{aligned}}$$

三、旋转矩阵

$$R=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

旋转矩阵性质

- R是一个正交矩阵
- R每行或每列各元素的自乘之和为1
  互乘之和为0

三、旋转矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

由**R**为正交矩阵的特性，可得到：

旋转矩阵性质

$$a_1=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad a_2=-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad a_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$b_1=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad b_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad b_3=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$c_1=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad c_2=-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad c_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

三、旋转矩阵

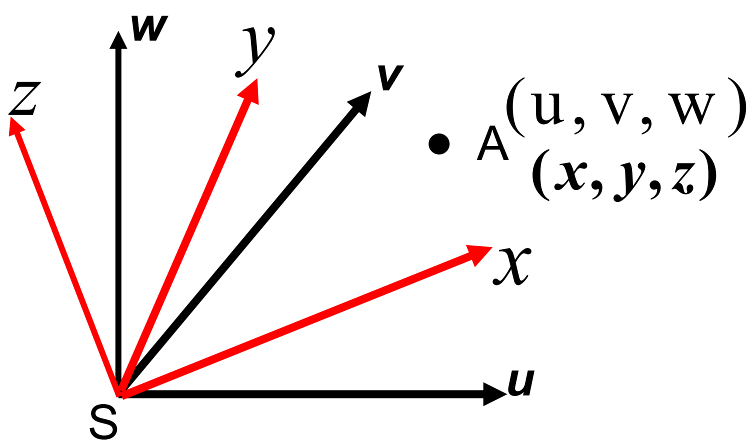
$$R=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

旋转矩阵性质

- R是一个正交矩阵
- R每行或每列各元素的自乘之和为1
  互乘之和为0
- R中每个元素的值等于其代数余子式

三、旋转矩阵

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$



cos	x	y	z
u	a_1	a_2	a_3
v	b_1	b_2	b_3
w	c_1	c_2	c_3

三、旋转矩阵

$$R=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

旋转矩阵性质

- R每行或每列各元素的自乘之和为1
  互乘之和为0
- R中每个元素的值等于其代数余子式
- 每个元素的值为变换前后两坐标轴相应夹角的余絃
- 用三个独立的方向余弦构成旋转矩阵

三、旋转矩阵

将a2，a3，b3作为独立参数构成的旋转矩阵

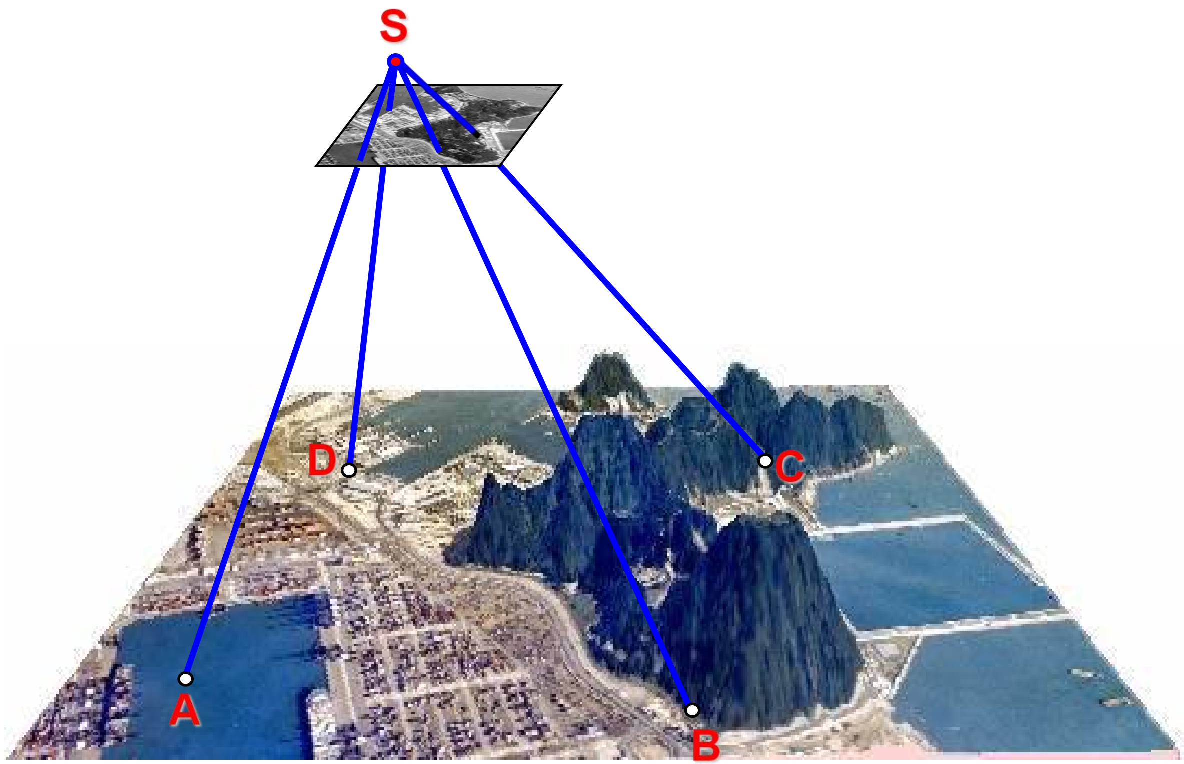
$$R=\begin{bmatrix} \sqrt{1-a_2^2-a_3^2} & a_2 & a_3 \\ \dfrac{-a_1a_3b_3-a_2c_3}{1-a_3^2} & \sqrt{1-b_1^2-b_3^2} & b_3 \\ a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & \sqrt{1-a_3^2-b_3^2} \end{bmatrix}$$

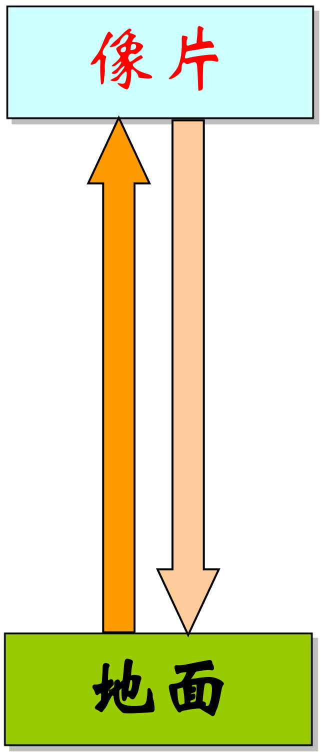
三、旋转矩阵

注意： 不管是用哪种方法构成旋转矩阵，对相同的两个空间直角坐标变换而言，它们构成的旋转矩阵是完全相同的，即不同的参数解求的方向余弦值是完全相同的。

四、中心构像方程

知识回顾（Revier）





摄影测量中常用的坐标系

框标坐标系

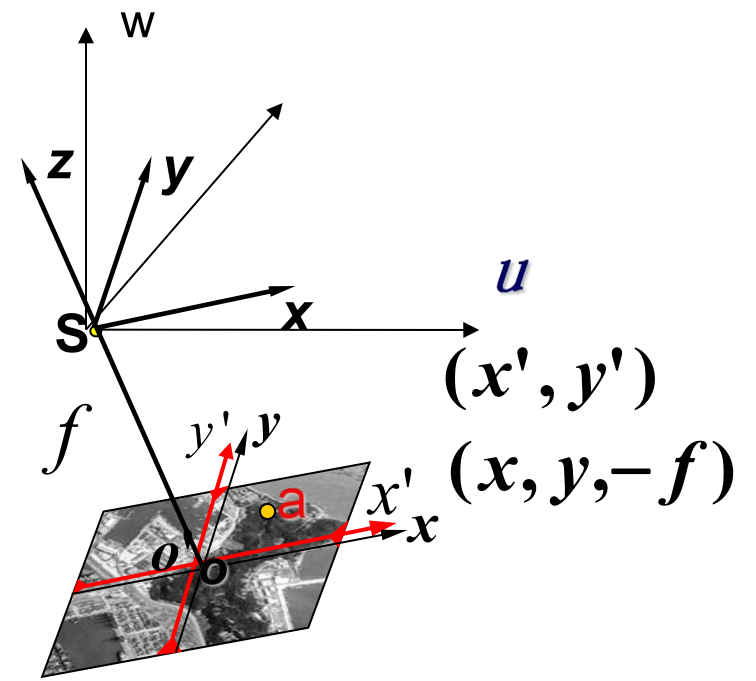
像方

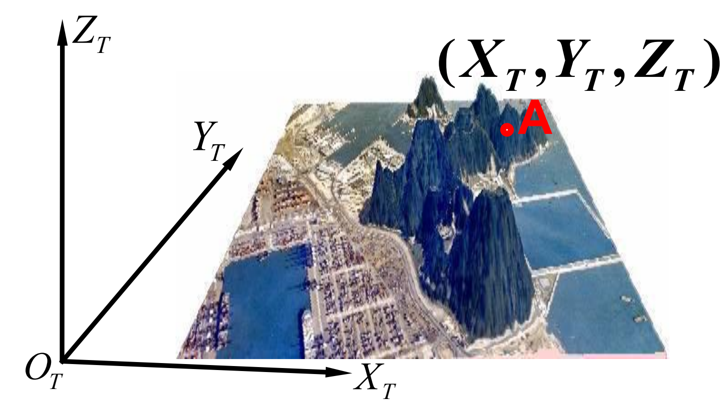
- 像主点坐标系
- 像空间坐标系

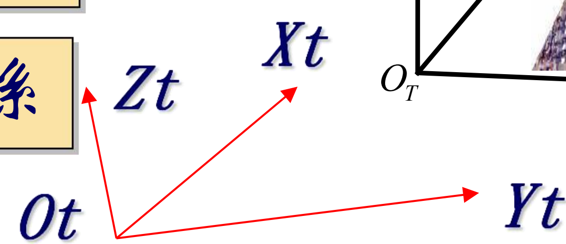
像空间辅助坐标系

物方

- 摄影测量坐标系
- 大地测量坐标系



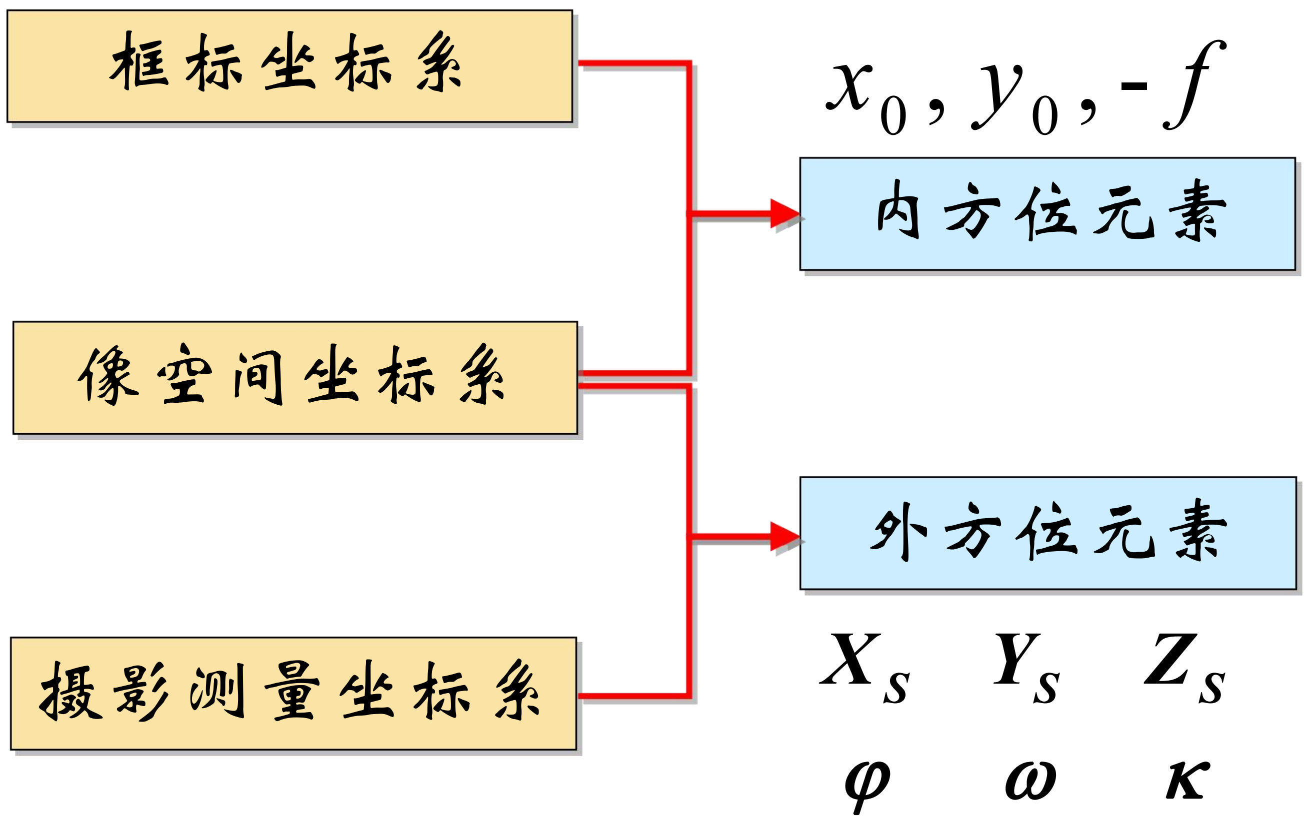




四、中心构像方程

知识回顾（Revier）

[二]像片方位元素



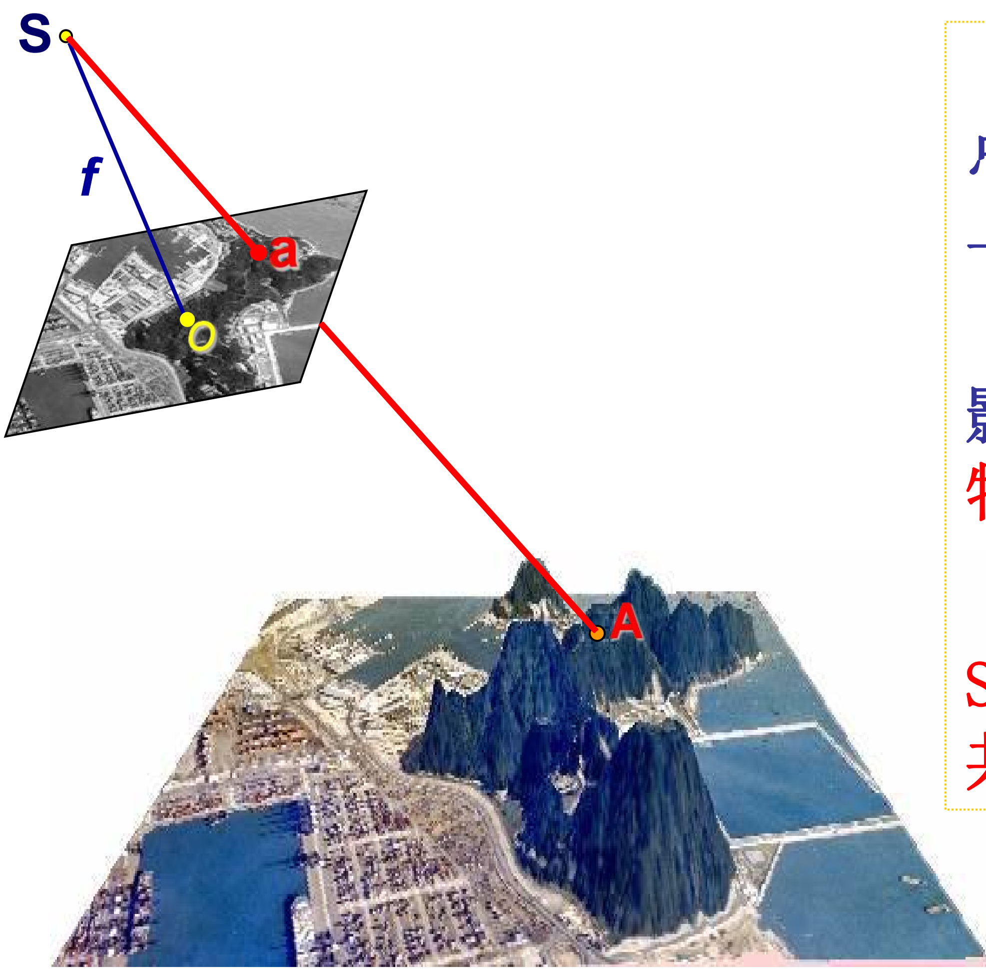
四、中心构像方程

本节内容

（CONTENTS）

四、中心构像方程

Part I 共线条件方程的定义



在摄影时，地面上一点A经过摄影仪S，在像片上形成构像a。

在理想的情况下，摄影瞬间像点、投影中心、物点位于同一条直线上。

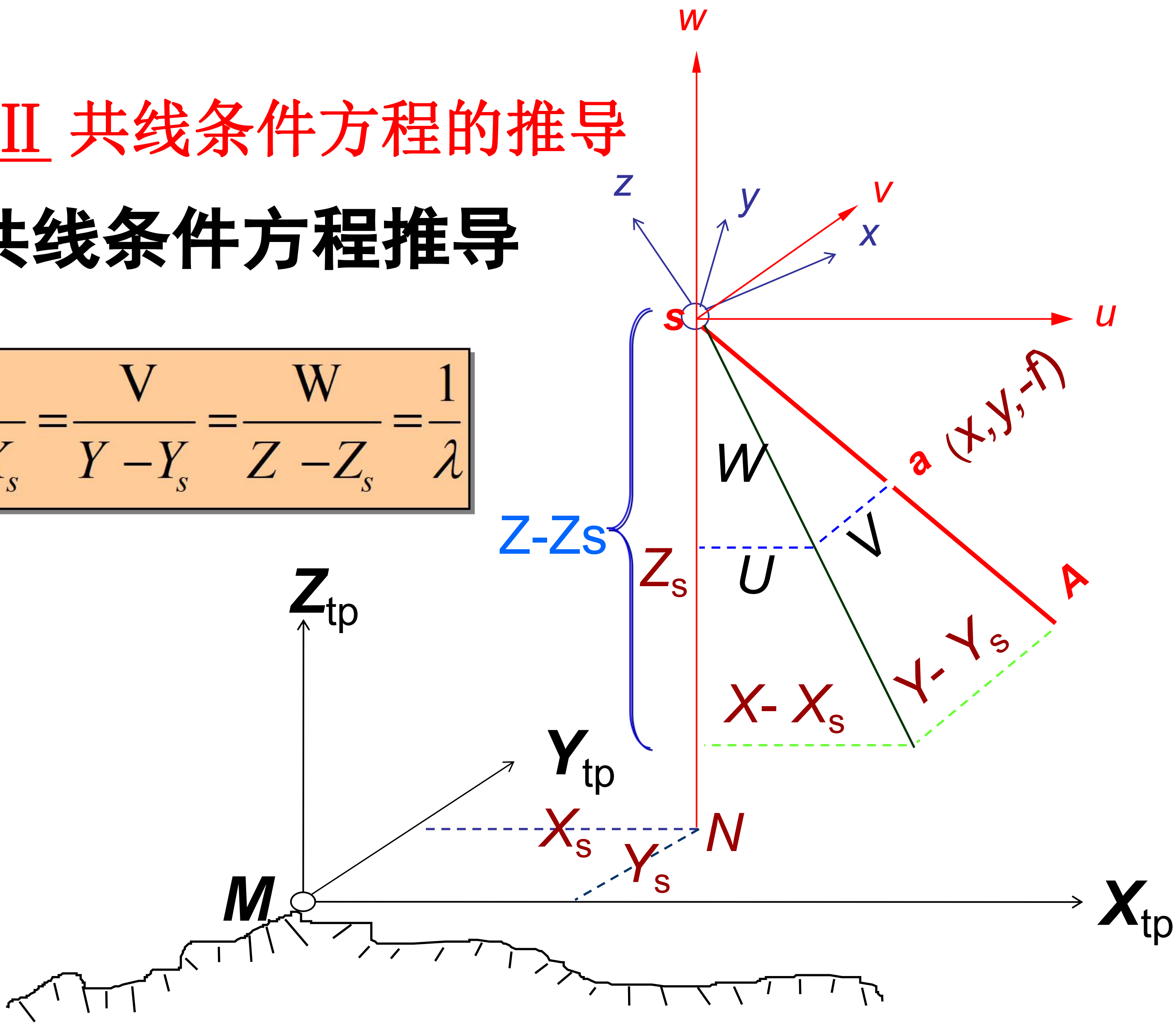
我们把描述三点（A、S、a)共线的方程，称为共线条件方程。

四、中心构像方程

PartⅡ 共线条件方程的推导

（1）共线条件方程推导

$$\frac{U}{X-X_s}=\frac{V}{Y-Y_s}=\frac{W}{Z-Z_s}=\frac{1}{\lambda}$$



四、中心构像方程

$$\frac{U}{X-X_s}=\frac{V}{Y-Y_s}=\frac{W}{Z-Z_s}=\frac{1}{\lambda}$$

PartⅡ 共线条件方程的推导

（3）共线条件方程推导

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} X-X_s \\ Y-Y_s \\ Z-Z_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}=\mathbf{R}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$$

$$x=-f\frac{a_1(X-X_s)+b_1(Y-Y_s)+c_1(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)}$$

$$y=-f\frac{a_2(X-X_s)+b_2(Y-Y_s)+c_2(Z-Z_s)}{a_3(X-X_s)+b_3(Y-Y_s)+c_3(Z-Z_s)}$$

用**地面点**坐标表示**像点**坐标的共线条件方程

四、中心构像方程

PartⅡ 共线条件方程的推导

（3）共线条件方程推导

$$\begin{cases} x = -f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y = -f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{cases}$$

框标坐标系：a（x'，y'） $x = x' - x_0; y = y' - y_0$

$$\begin{cases} x' - x_0 = -f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y' - y_0 = -f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{cases}$$

四、中心构像方程

PartⅡ 共线条件方程的推导

（3）共线条件方程推导

用像点坐标表示地面点坐标的共线条件方程

$$\begin{cases} x = -f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y = -f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X - Xs = (Z - Zs)\dfrac{a_1x + a_2y - a_3f}{c_1x + c_2y - c_3f} \\ Y - Ys = (Z - Zs)\dfrac{b_1x + b_2y - b_3f}{c_1x + c_2y - c_3f} \end{cases}$$

（构像方程） （反演方程）

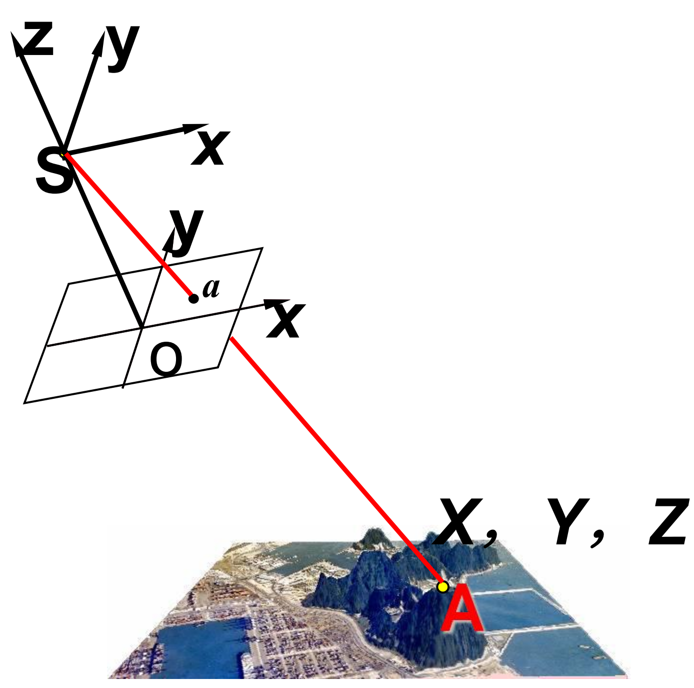
四、中心构像方程

Part 3 共线条件方程的应用

$$
\begin{cases}
x = -f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\
y = -f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)}
\end{cases}
$$

（1）求像点坐标

已知：	求：
X_S，Y_S，Z_S f a_i，b_i，c_i	x，y



四、中心构像方程

Part 3 共线条件方程的应用

$$\begin{cases} x' - x_0 = -f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y' - y_0 = -f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{cases}$$

（2）答解方位元素

已知：

x'_i, y'_i

X_i, Y_i, Z_i

x_0, y_0, f

求：

X_S，Y_S，Z_S

a_i，b_i，c_i

空间后方交会的基本原理

四、中心构像方程

Part 3 共线条件方程的应用

$$\begin{cases} X - Xs = (Z - Zs)\dfrac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \\ Y - Ys = (Z - Zs)\dfrac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \end{cases}$$

（3）求地面点坐标

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X - Xs}{Z - Zs} = \dfrac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \\ \dfrac{Y - Ys}{Z - Zs} = \dfrac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \end{cases}$$

已知：

x，y

X_S，Y_S，Z_S

a_i，b_i，c_i

f

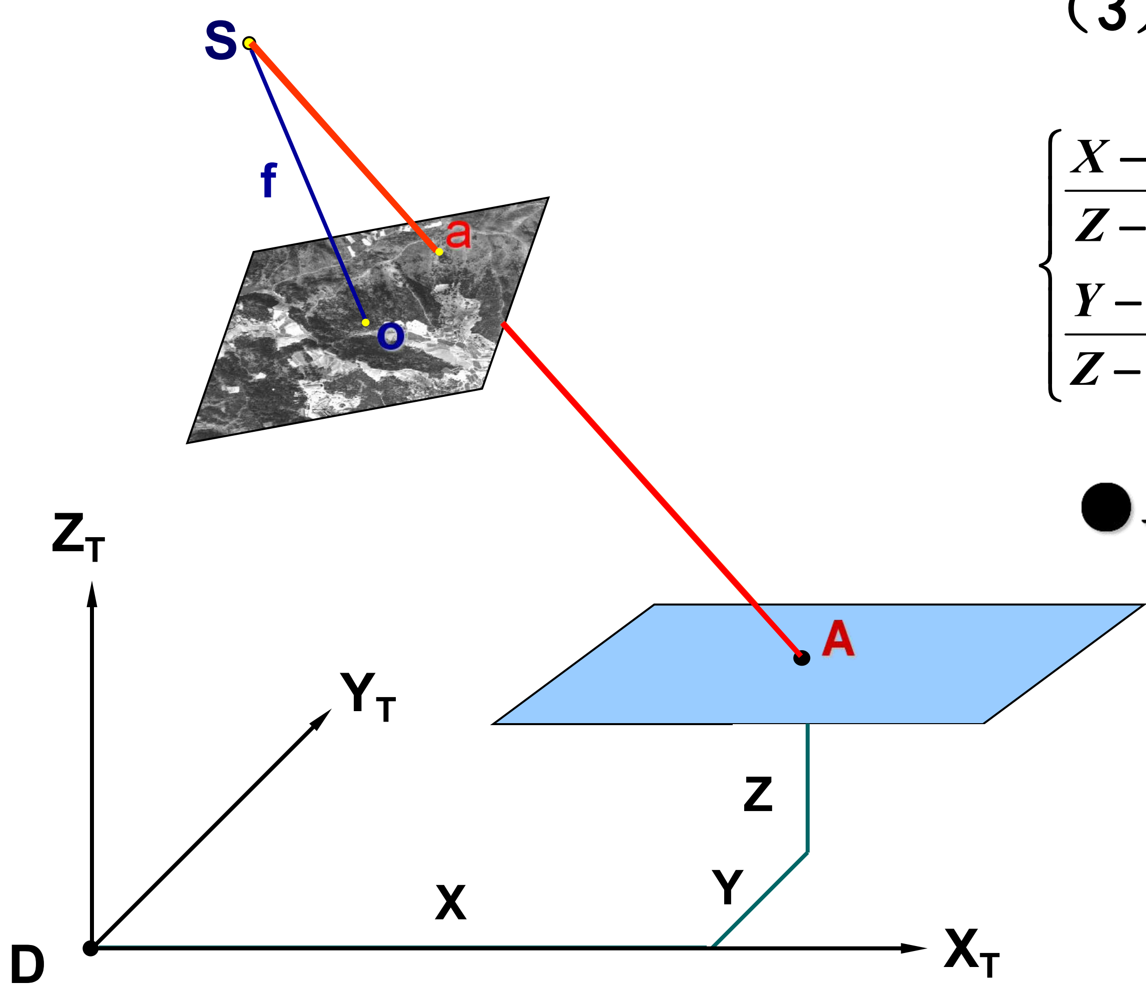
求：

X，Y，Z

？

四、中心构像方程

Part 3 共线条件方程的应用



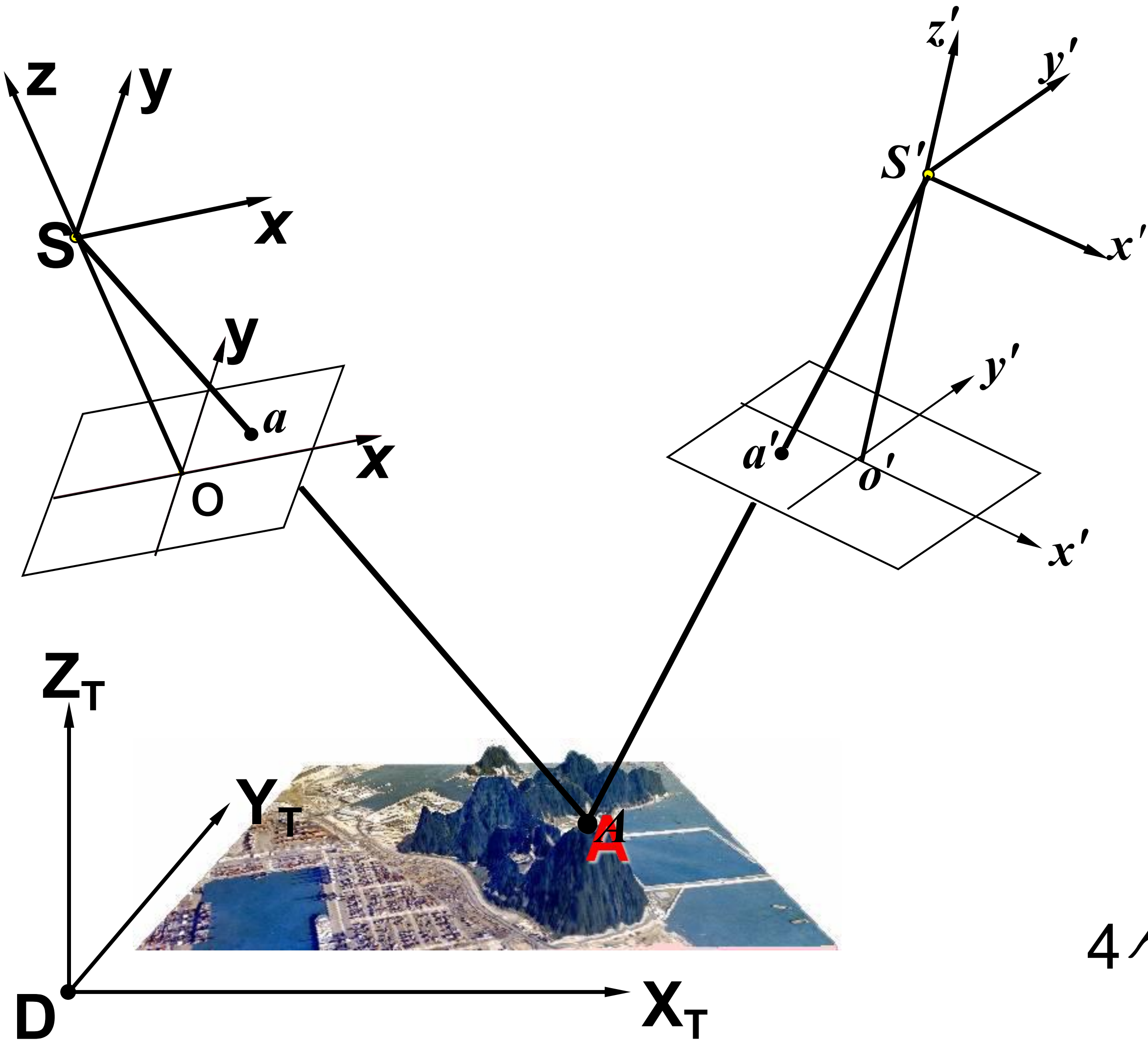
（3）求地面点坐标

$$\begin{cases} \dfrac{X - Xs}{Z - Zs} = \dfrac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \\ \dfrac{Y - Ys}{Z - Zs} = \dfrac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \end{cases}$$

- 单张像片定位

四、中心构像方程

Part 3 共线条件方程的应用



（3）求地面点坐标

$$\begin{cases} \dfrac{X-Xs}{Z-Zs} = \dfrac{a_1x+a_2y-a_3f}{c_1x+c_2y-c_3f} \\ \dfrac{Y-Ys}{Z-Zs} = \dfrac{b_1x+b_2y-b_3f}{c_1x+c_2y-c_3f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{X-Xs'}{Z-Zs'} = \dfrac{a_1'x'+a_2'y'-a_3'f}{c_1'x'+c_2'y'-c_3'f} \\ \dfrac{Y-Ys'}{Z-Zs'} = \dfrac{b'x'+b'x'-b'f}{c_1'x'+c_2'y'-c_3'f} \end{cases}$$

● 立体像对定位

4个方程，解算3个未知数

四、中心构像方程

本讲小结

[一] 共线条件方程的定义

理想条件　　S，a，A共线

[二] 共线条件方程的推导（重点、难点）

点的坐标变换

$$\begin{cases} x=-f\dfrac{a_1(X-X_S)+b_1(Y-Y_S)+c_1(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \\ y=-f\dfrac{a_2(X-X_S)+b_2(Y-Y_S)+c_2(Z-Z_S)}{a_3(X-X_S)+b_3(Y-Y_S)+c_3(Z-Z_S)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X-Xs=(Z-Zs)\dfrac{a_1x+a_2y-a_3f}{c_1x+c_2y-c_3f} \\ Y-Ys=(Z-Zs)\dfrac{b_1x+b_2y-b_3f}{c_1x+c_2y-c_3f} \end{cases}$$

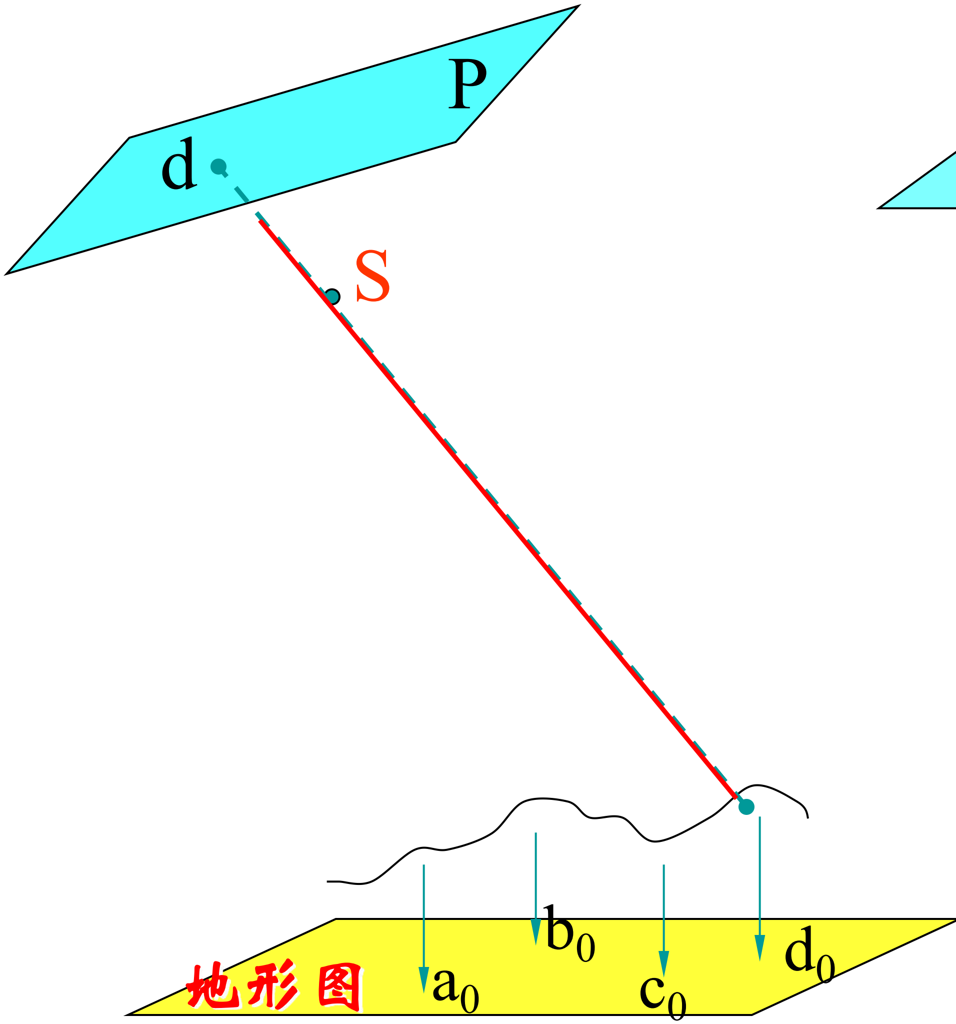
[三] 共线条件方程的应用分析（重点）

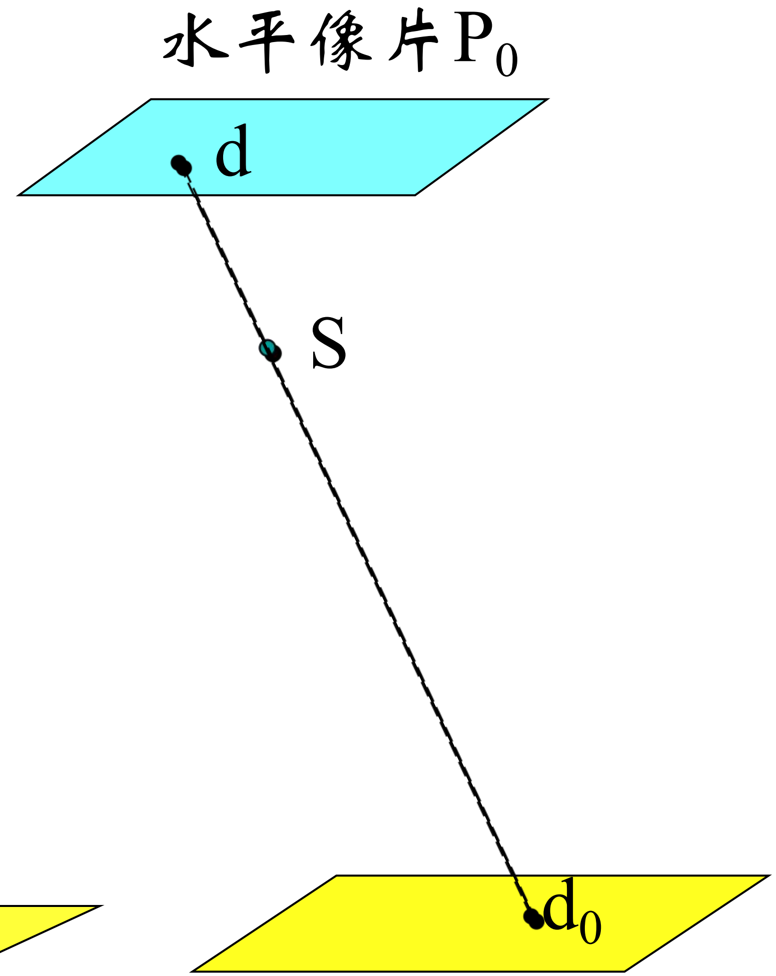
计算像点位置　　求解方位元素

答解地面点坐标

四、航摄像片上的像点位移

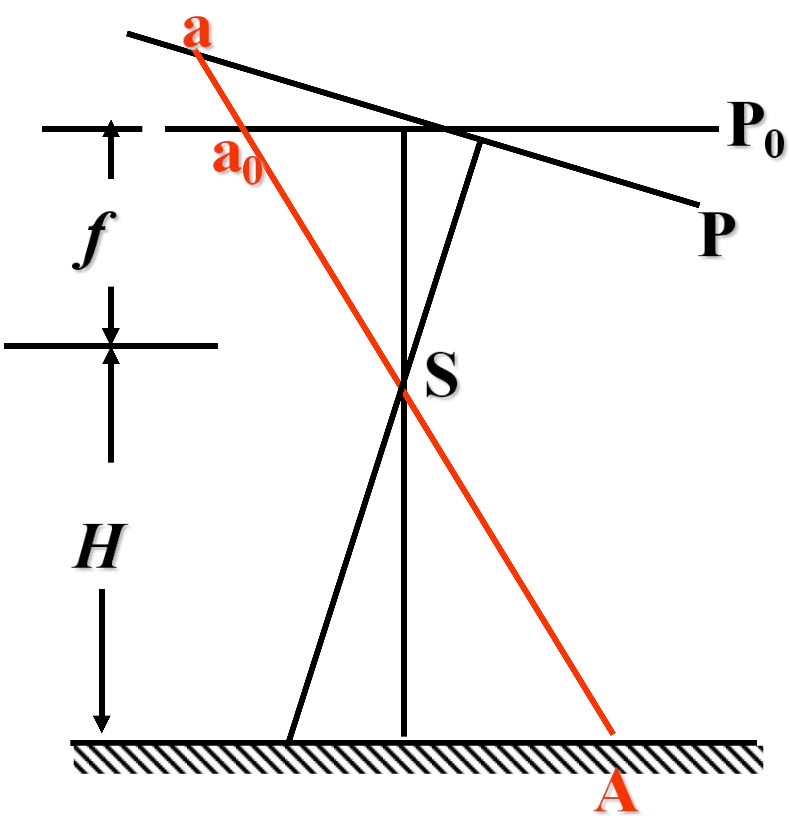
问题的引出



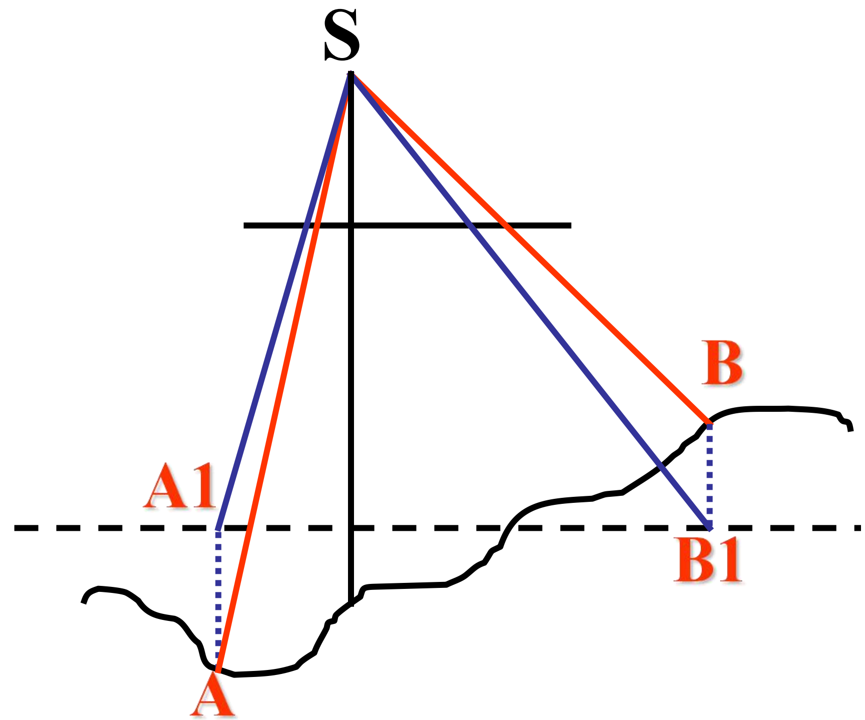


四、航摄像片上的像点位移

像片倾斜的影响



地形起伏的影响



四、航摄像片上的像点位移

- 对于平坦地面拍摄的一张水平像片，称为理想像片。

- 地面点在航摄像片上的构像相对于理想情况下构像位置的差异称为像点位移。

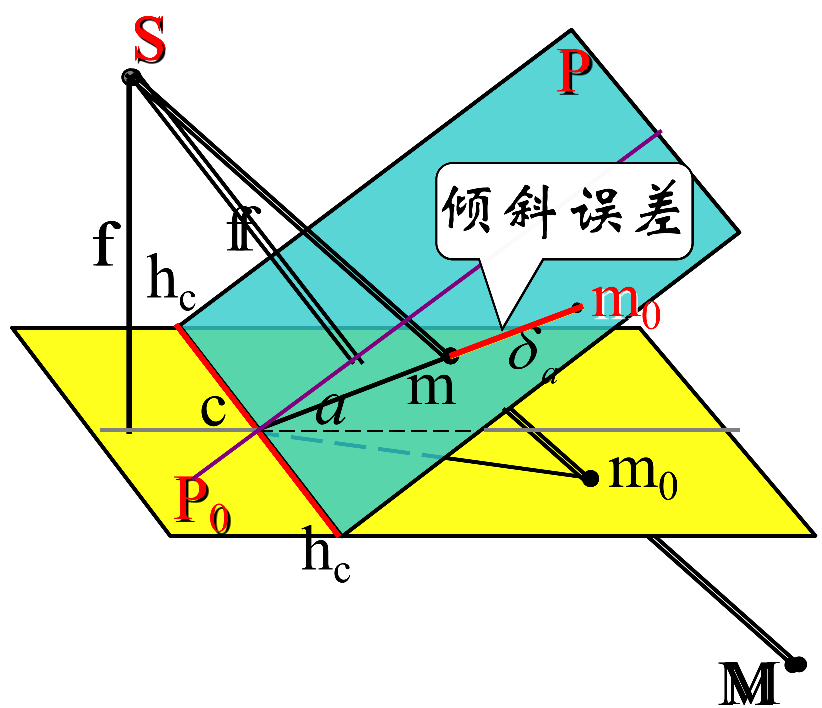
- 像点位移包括因像片倾斜引起的像点位移和因地面起伏引起的像点位移（投影差）。

一）地面水平时，像片倾斜引起的像点位移

1、倾斜误差定义（*Tilt Displacement*）

同摄站同主距的倾斜像片和水平像片沿等比线重合时,地面点在倾斜像片上的像点与相应水平像片上像点之间的直线移位。

几何学上，等比线可以视为是倾斜像片与同主距水平像片的交线。



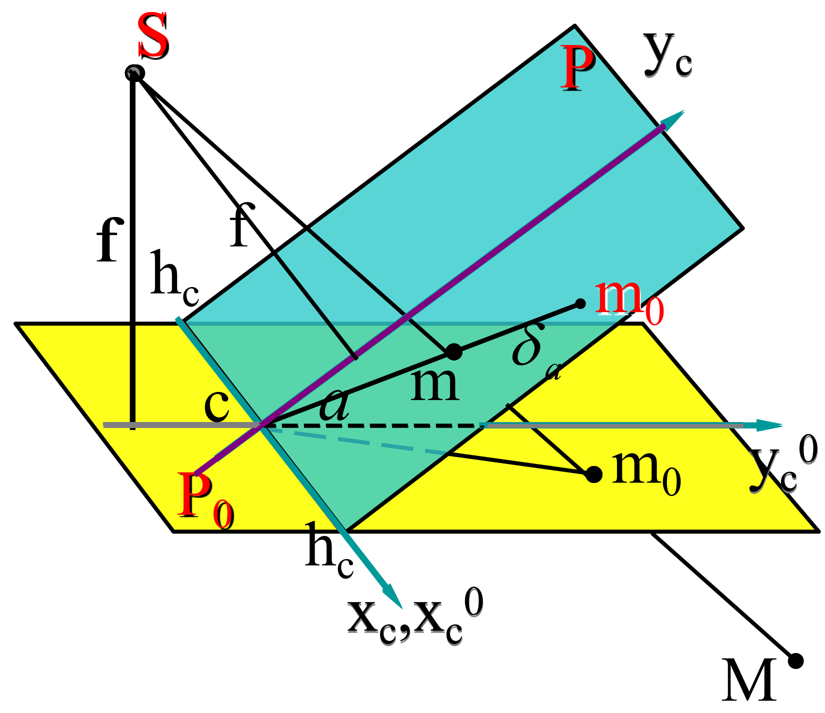
[一]因像片倾斜引起的像点移位

1、倾斜误差定义（*Tilt Displacement*）

同摄站同主距的倾斜像片和水平像片沿等比线重合时,地面点在倾斜像片上的像点与相应水平像片上像点之间的直线移位。

$m(x_c, y_c)$

$m_0(x_c^0, y_c^0)$

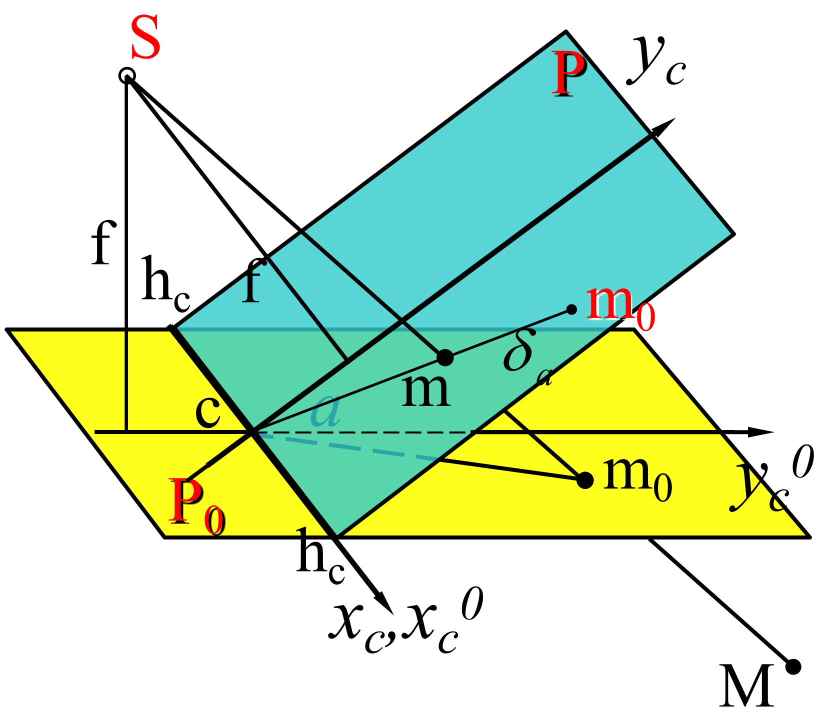


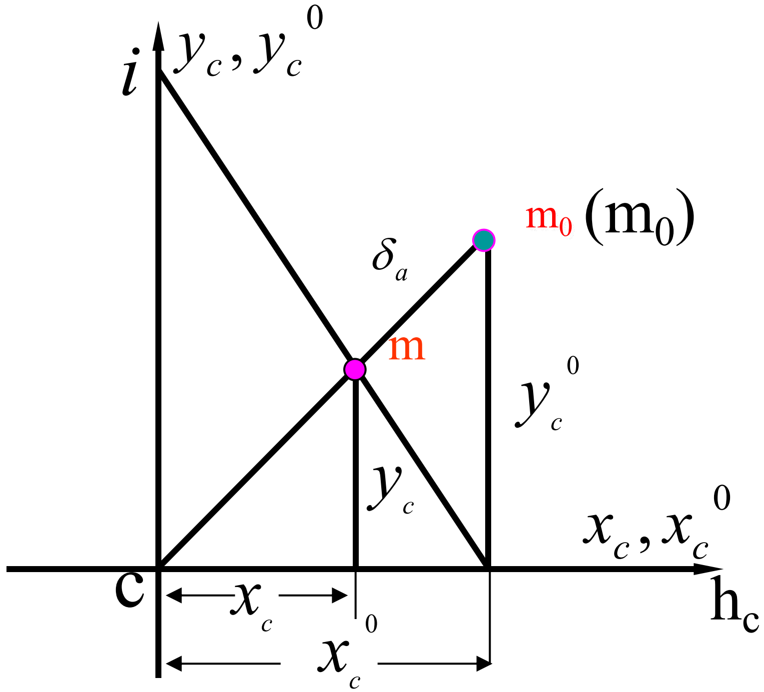
[一]因像片倾斜引起的像点移位

2、近似表达公式

$\mathbf{m}(x_c, y_c)$

$\mathbf{m_0}(x_c^0, y_c^0)$





2、近似表达公式

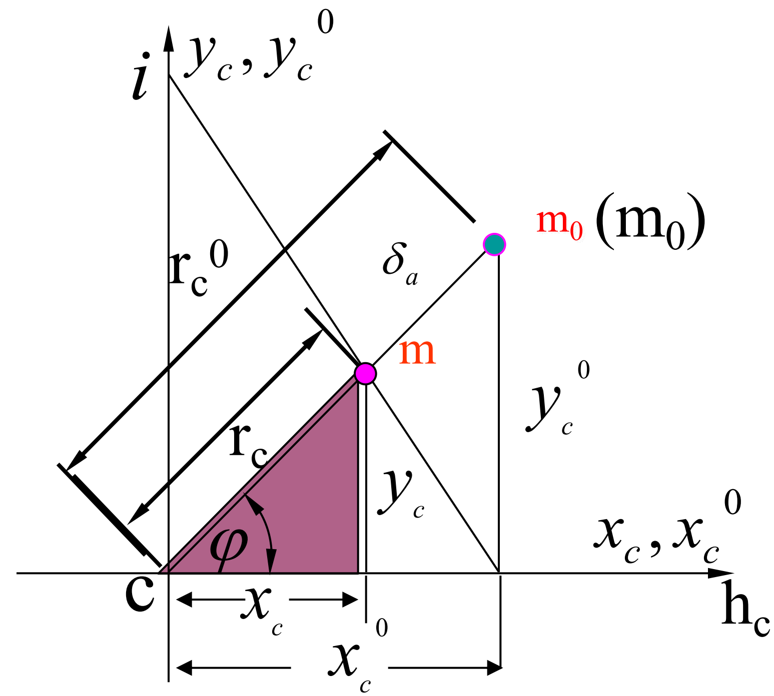
$$\tan\varphi = \frac{y_c}{x_c} \qquad \tan\varphi^0 = \frac{y_c^{\,0}}{x_c^{\,0}}$$

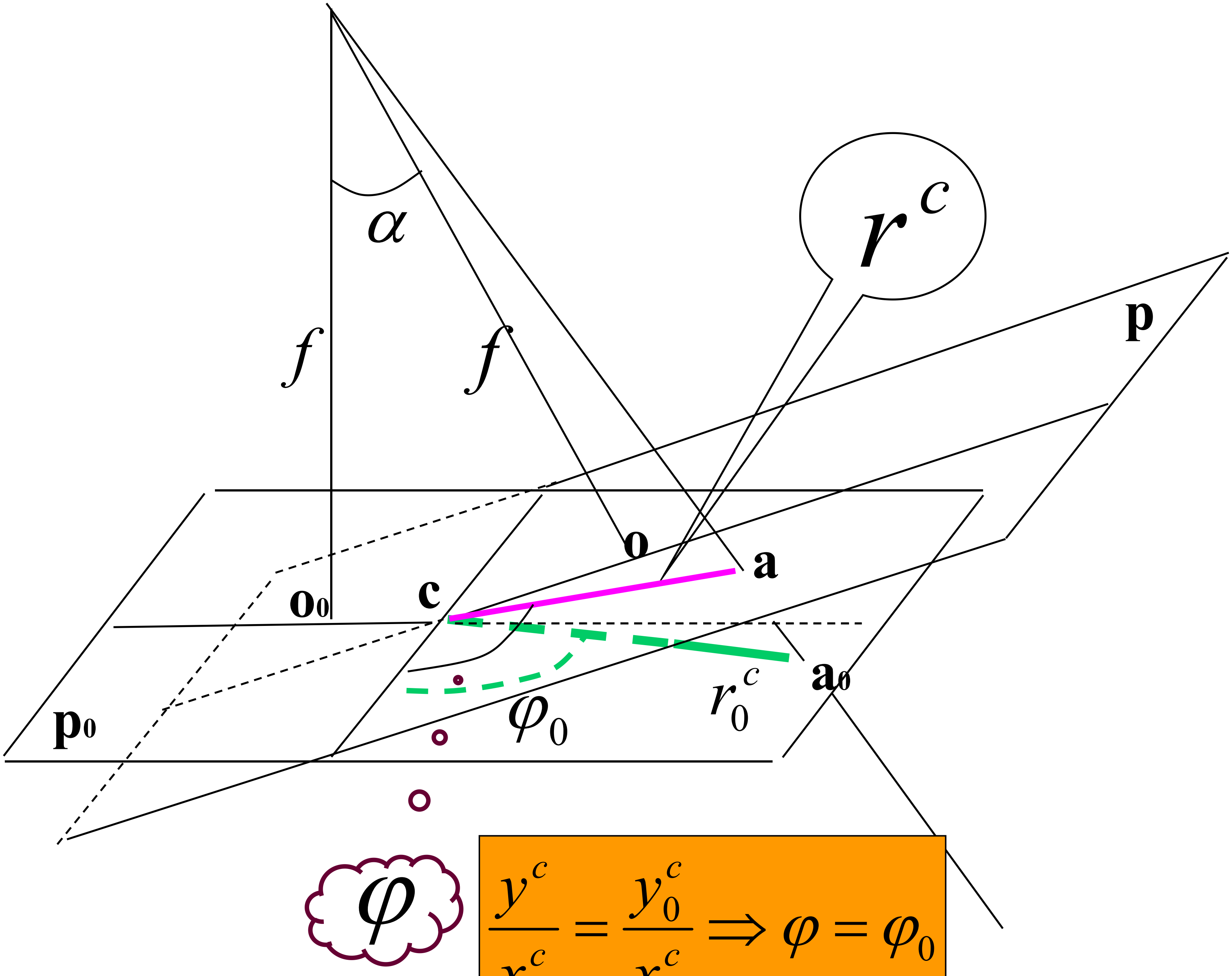
根据等角点的特性有：

$$\varphi_c^0 = \varphi_c$$

$$\delta_\alpha = cm - cm_0 = r_c - r_c^0$$

$$\delta_\alpha \approx -\frac{r_c^2}{f}\sin\varphi\sin\alpha$$





$$\frac{y^c}{x^c} = \frac{y_0^c}{x_0^c} \Rightarrow \varphi = \varphi_0$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} x_0^c &= \frac{fx^c}{f - y^c \sin\alpha} \\ y_0^c &= \frac{fy^c}{f - y^c \sin\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} {x_0^c}^2 &= \frac{(fx^c)^2}{(f - y^c \sin\alpha)^2} \\ {y_0^c}^2 &= \frac{(fy^c)^2}{(f - y^c \sin\alpha)^2} \end{aligned} \Rightarrow {x_0^c}^2 + {y_0^c}^2 = \frac{f({x^c}^2 + {y^c}^2)}{(f - y^c \sin\alpha)^2} = \frac{f^2 {r^c}^2}{(f - y^c \sin\alpha)^2} = {r_0^c}^2 \\
&\Rightarrow r_0^c = \frac{fr^c}{f - y^c \sin\alpha} = r^c - \delta_a \\
&\Rightarrow \delta_a = r^c - \frac{fr^c}{f - y^c \sin\alpha} = \frac{-{r^c}^2 \sin\varphi \sin\alpha}{f - y^c \sin\alpha} \\
&\Rightarrow \delta_a \approx \frac{-{r^c}^2 \sin\varphi \sin\alpha}{f}
\end{aligned}
$$

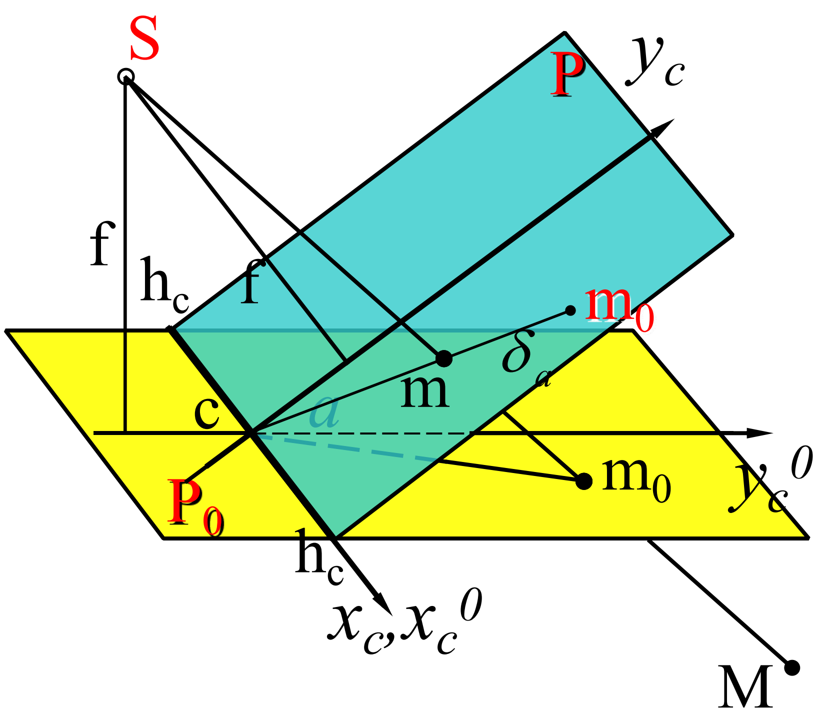
3、移位的定性特性

$$\delta_\alpha \approx -\frac{r_c^2}{f}\sin\varphi\sin\alpha$$

移位的大小：

当 α φ 固定不变时，r_c 越大，移位越大（也就是在像片的边缘，变形最大）。

产生的方向：等角点的辐射线上



4、倾斜误差的特性

$$\delta_\alpha \approx -\frac{r_c^2}{f}\sin\varphi\sin\alpha$$

移位的方向：

（1）当 $\varphi=0^0$ 或 180^0 时，$\delta_\alpha=0$ 即等比线上的点不会因像片倾斜产生像点位移。

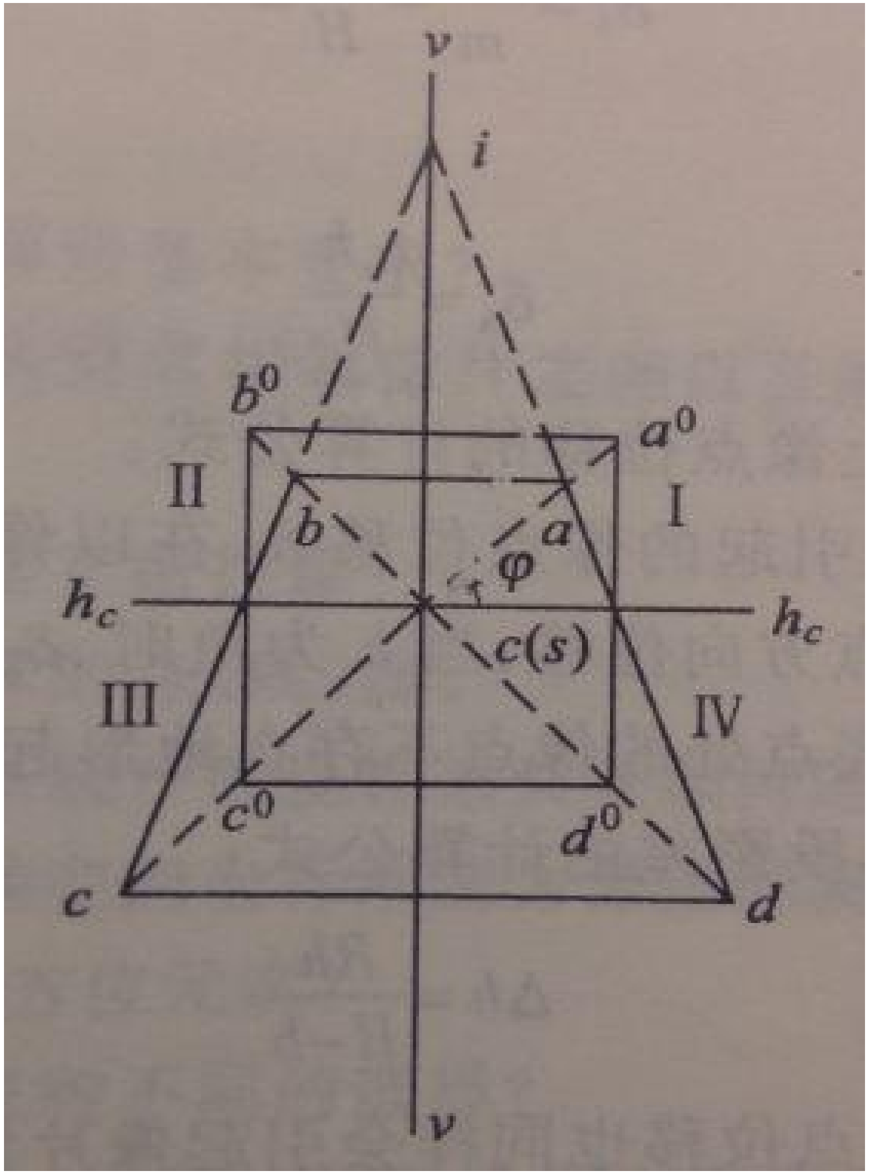
（2）当 $\varphi<180^0$ 时, $\delta<0, r_c^0>r_c$ ，即在一、二象限内，像点位移朝向等角点，影像比例尺变小；

（3）当 $\varphi>180^0$ 时, $\delta>0, r_c^0<r_c$，即在三、四象限内，像点位移背向等角点，影像比例尺变大。

（4）当时 $\varphi=90^0$ 或 270^0 ，在向径相同情况下，主纵线上点的位移最大。

由图来分析：

利用中心投影作图，一个地面正方形在相片上的成像为一梯形。



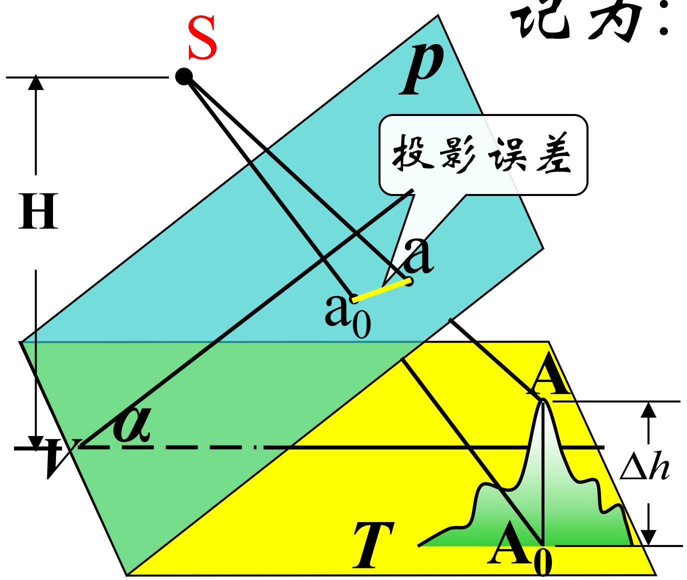
二）像片水平时，地面起伏引起的像点位移

1、像片上的投影差

由地形起伏引起的像点位移也称为**像片上的投影差**。它是中心投影与正射投影在地形起伏情况下产生的差异。

记为：δh_{α}

当地面有起伏时，高于或低于所选定的基准面的地面点的像点，与该地面点在基准面上的垂直投影点的像点之间的直线移位。



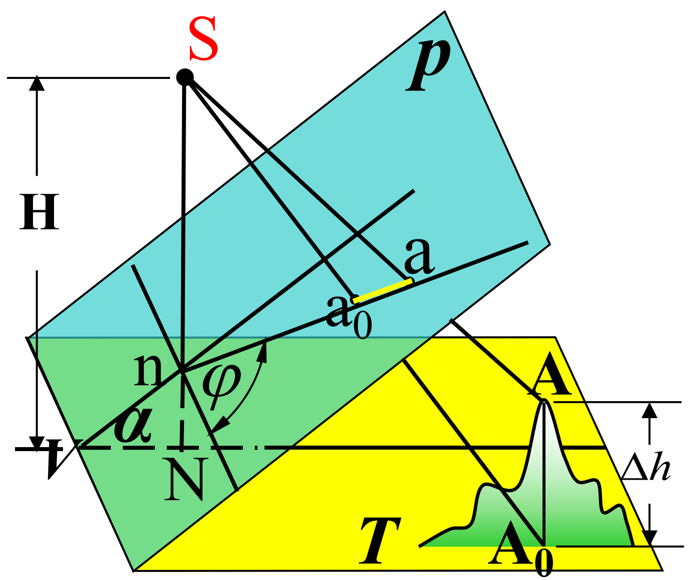
发生在像底点辐射线上！

记为：δh_α

设 $na=r_n$，$na_0=r_n^0$

则 $\delta h_\alpha = r_n - r_n^0$

方向角 φ

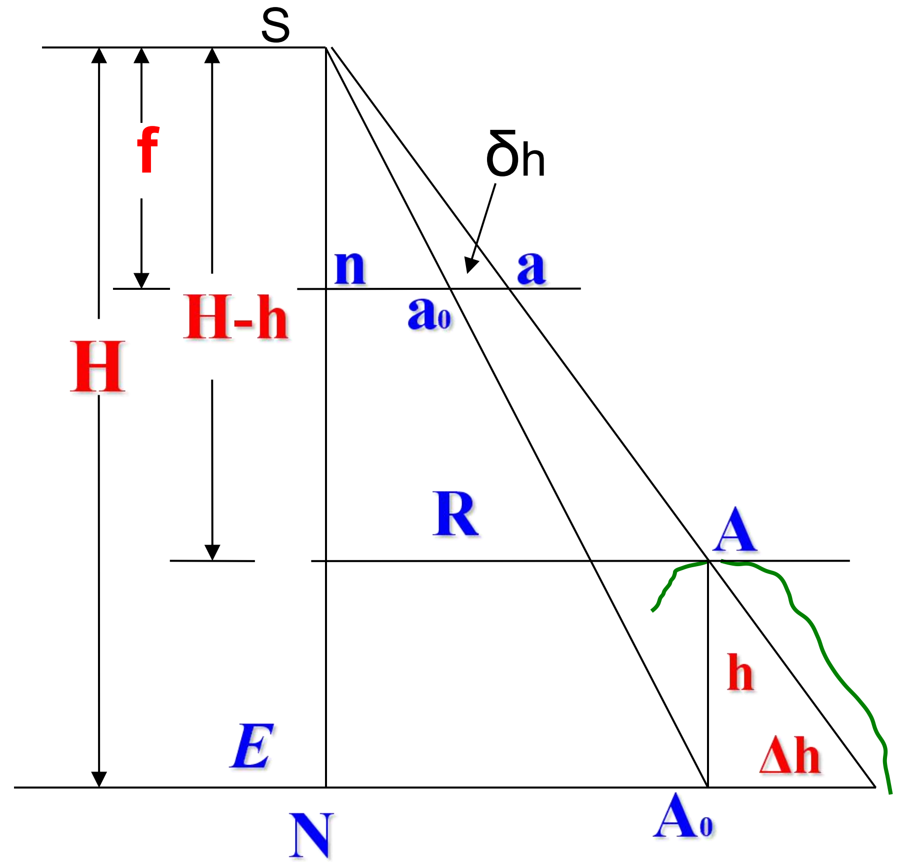


由三角形相似性变换

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{R}{H-h}=\frac{r_n}{f}$$

$$\Delta h=\frac{r_n}{f}h \qquad \delta_h=\frac{\Delta h}{m}=\frac{f}{H}\Delta h$$

$$\delta_h=\frac{r_n h}{H}$$



$$\Delta h=\frac{Rh}{H-h}$$

2、特性 $\delta h=\frac{\Delta h}{H}r$

- 产生的方向

像底点辐射线上。

- 移位的方向

$\Delta h>0$ 远离像底点

$\Delta h<0$ 靠近像底点

- 移位的大小(定性)

1)在选定基准面的情况下，地面点的高差越大，辐射距越大，则投影误差越大。

2)基准面的相对航高越大，则投影误差越小。

3)投影误差具有相对性。

由此可见：

像片上任何一点都存在像点位移，位移大小随点位的不同而不同，因此一张像片上不同点位的比例尺是不相同的。

除了上述两种原因引起的像点位移外，物镜畸变、大气折光、地球曲率及底片变形等一些因素均会导致像点位移。

本章小结

- 中心投影的基本知识
- 航摄像片上特殊的点、线、面
- 摄影测量常用的坐标系统
- 航摄像片上的内、外方位元素
- 像点的空间直角坐标变换
- 中心投影构像方程
- 航摄像片上的像点位移

思考题：

1、航片与地形图的区别

1）投影方式不同

地形图：正射投影 ⟶ 比例尺固定

图形形状与实地完全相似，方位保持不变

航片：中心投影 ⟶ 平均比例尺

影像有变形，方位发生变化

2）表示方法和表示内容不同

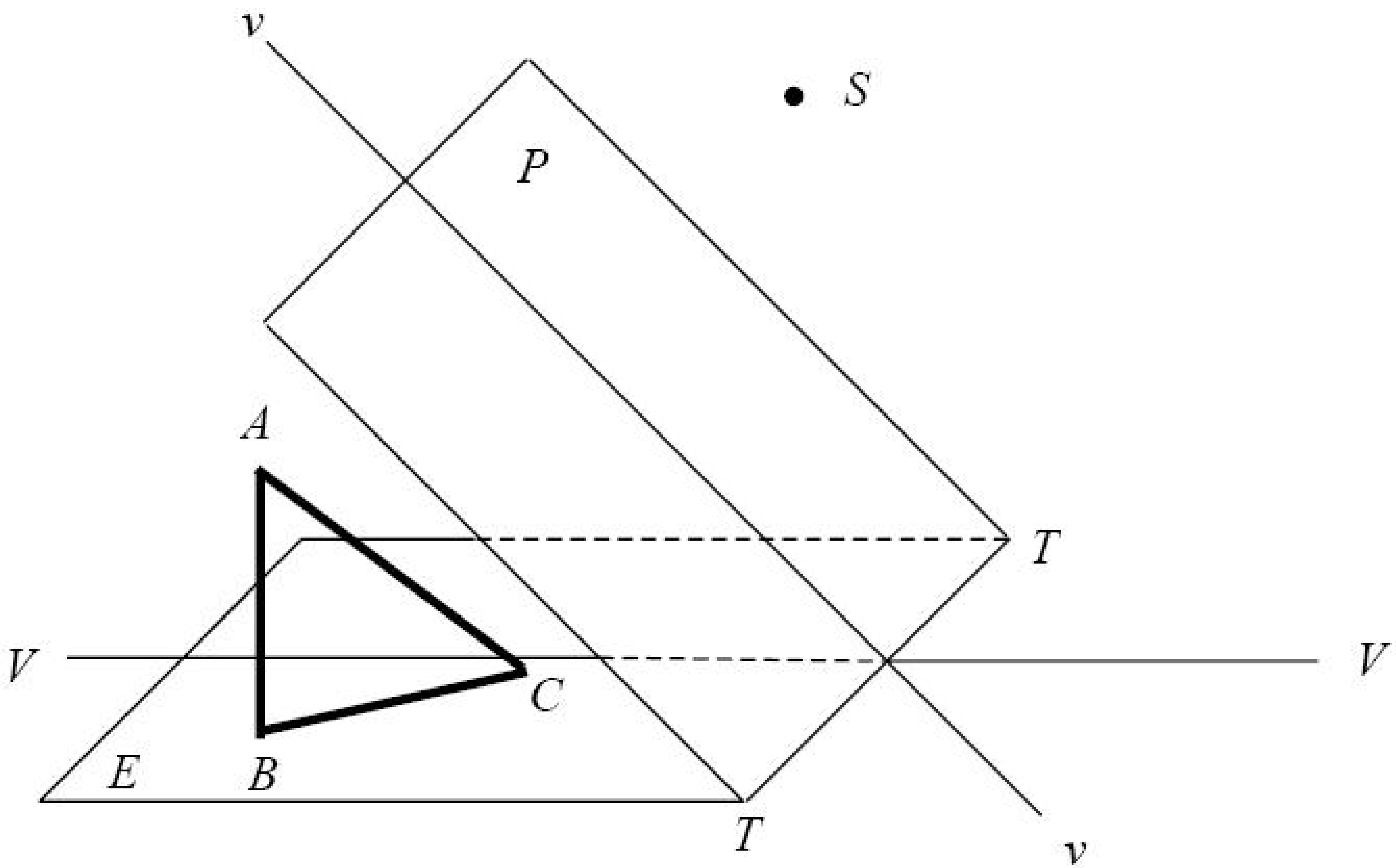
- 在表示方法上

地形图是按成图比例尺，用各种规定的符号、注记和等高线表示地物、地貌；航片则是通过影像的大小、形状和色调表示。

- 在表示内容上

在地形图上用相应的符号、文字、数字注记表示，在像片上这些是不存在的；另一方面，地形图是经过制图综合的，而航片则是所摄区域的全部影像。

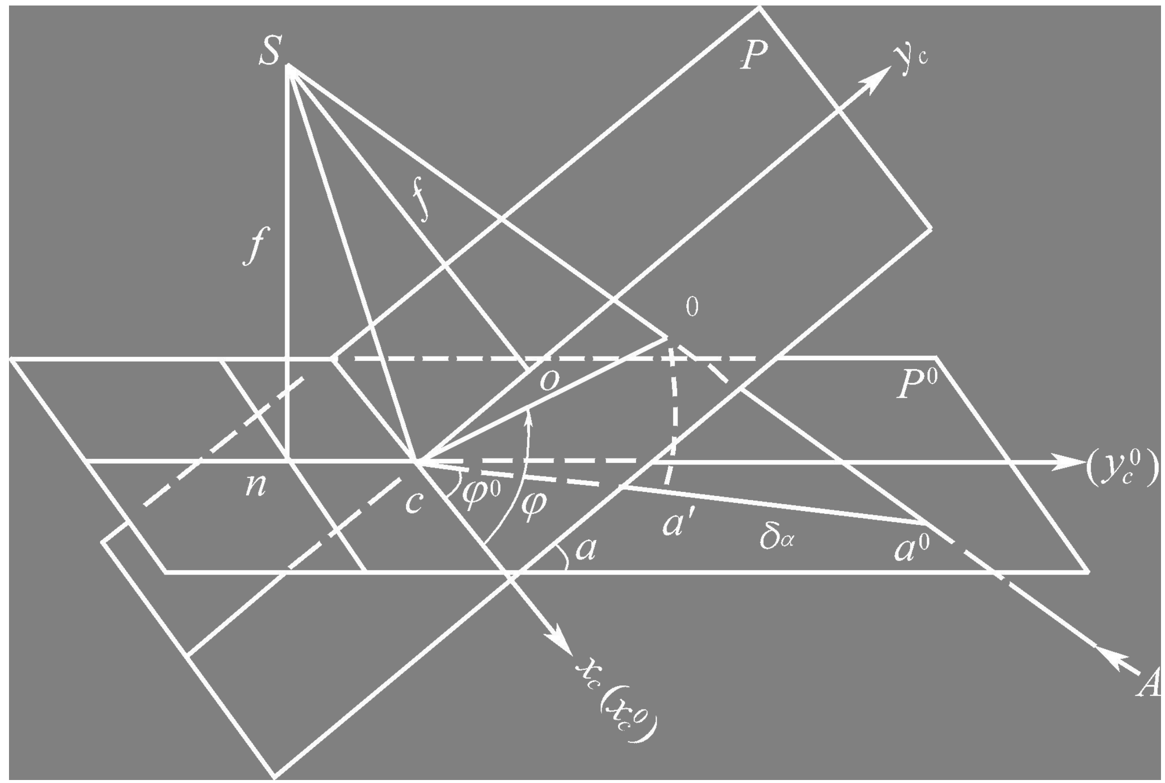
2、如图所示，已知空间直角三角形ABC，其BC边在物面E上，AB边垂直于物面E，垂足为B，求作直角三角形ABC在像片P上的中心投影。



3、根据下图及下式，推导分别以像主点o⁰及o为原点的水平像片P⁰与倾斜像片P上的像点坐标关系式。

$$x_c^0 = \frac{f}{f - y_c \sin\alpha} x_c$$

$$y_c^0 = \frac{f}{f - y_c \sin\alpha} y_c$$



(x_c^0, y_c^0) 水平像片上的像点坐标

(x_c, y_c) 倾斜像片上的像点坐标

以等角点C为坐标原点
主纵线为y轴
等比线为x轴

思考题

1. 以倾斜航摄像片为例，请作图表示摄影中心、像主点、像底点、等角点、地底点、灭点、主纵线、等比线以及主垂面的相互关系，并加以必要的符号和文字说明。

   (07年武大考研题)

2. 请作示意图分别表示航空摄影像片的内方位元素和外方位元素并加以必要的符号和文字说明。(08年武大考研题)

3. 以 φ,ω,κ 转角系统为例，对于空间直角坐标系的旋转矩阵 $R=R_{\varphi}R_{\omega}R_{\kappa}$，试写出旋转矩阵中9个方向余弦（$a_1,a_2,\ldots,c_3$）的完整表达式。（06）

4. 请写出共线条件方程的表达式，详细说明表达式中每个符号的准确含义。利用共线条件方程式可解求哪几类未知参数？（04年）

5. 请写出共线条件方程的表达式，详细说明表达式中每个符号的准确含义以及共线方程在摄影测量学中的主要应用。（03年）

6. 与平坦地区的水平像片相比，航摄像片通常存在什么像点位移？其中地形起伏引起的像点位移有什么特性？